工数期末专题冲刺（上）

Final project sprint of engineering mathematical analysis: Part I

物试 *001* 蔡子坚

电类 *023* 周奥杰

计试 *001* 朱天宇

医试 *008* 罗嘉欣

2021 年 2 月 22 日

钱学森书院学业辅导中心

Qian Xuesen College Academic Counseling Center

作品信息

- **标题**：工数期末专题冲刺（上）: *Final project sprint of engineering mathematical analysis: Part I*
- **作者**：物试 001 蔡子坚
  电类 023 周奥杰
  计试 001 朱天宇
  医试 008 罗嘉欣
- **校对排版**：物试 001 蔡子坚、计试 001 朱天宇、医试 008 罗嘉欣
- **出品时间**：2021 年 2 月 22 日
- **总页数**：47

目录

前言

为了帮助**临近期末考试**的同学们做最后的考前突击，我们编写了这份资料，希望它对同学们的期末复习起到帮助。下面介绍一下本资料的编写思想：为了与课堂笔记以及往年的期末习题集区分开来，我们把本资料定位成一个**“例题精讲”**类型的复习资料，它可能不像书本以及课堂笔记那样全面详实，也不像往年期末习题集那样呈现多套完整的试题，而是注重于**考试重点**的讲解。因此，它肯定不可能包含所有课本知识，而是考试中重点内容的呈现。为了保证此资料的连贯性，我们将会按照课本章节的顺序将各个重点串联起来，采用**考点分类的方式**来区分各个部分。紧接着，在具体到某一个考点时，我们会在一开始将有关的重要的公式与解题思想方法简略的罗列出来，然后再进行例题的讲解。在呈现例题时，我们将通过一些特别的方式，比如：

- “升级式”（就是先通过一道简单的问题引入，然后对此题的难度进行升级，由浅入深。）
- “一题多问式”（就是讲一道题进行扩展，在一道题的框架下，将与其相关的考点以小问的形式一一排序呈现，达到做一道题就能掌握多个考点的目的。）
- “一题多解”（便于大家对于解法进行挑选，用自己能掌握的解法）

以及对某个例题的细致讲解。因此，我们的例题肯定不会仅仅只有答案，而是配有详细的讲解以及一些思想方法，它们的价值远比答案重要。综上所述，这是一本以“讲”为主的资料，它注重于课本的重点，试卷的考点，以及做题思想和方法的总结，以此来达到“以少胜多”的目的。

同时，由于编者水平所限，编写过程中难免会出现错误，欢迎读者指正。对本书的建议，请通过 QQ：2291139721(物理实验班 001 蔡子坚) 联系编者，我们感激您的宝贵意见！

最后，祝各位同学期末考试顺利！

第一章

§1.1 求极限

1.1.1 概述

求极限问题是每年期末考试必考内容，理论上掌握以下八种方法就可以解答所有题目 (~~但事实上是不可能的~~)：

1. 利用有理运算法则
2. 利用基本极限 (重点牢记以下内容)：
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
   - $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}\\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\end{cases}$
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$
   - $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (\text{常数}a>0)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\end{cases}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & ,n=m\\ 0 & ,n<m\\ \infty & ,n>m\end{cases}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}1 & ,x=1\\ 0 & ,|x|<1\\ \infty & ,|x|>1\\ \text{不存在} & ,x=-1\end{cases}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{nx}=\begin{cases}1 & ,x=0\\ 0 & ,x<0\\ \infty & ,x>0\end{cases}$
3. 利用等价无穷小替换
4. 利用夹逼准则
5. 利用单调有界准则与递推关系

6. 利用 $L'H\hat{o}pital$ 法则
7. 利用带 $Peano$ 余项的 $Taylor$ 公式
8. 利用定积分或者导数的定义

对以上方法烂熟于心，并不一定能解决所有极限问题，因为某些极限问题需要同时运用多种方法，很难想到。但当你系统地整理一遍这些方法后，将会有很大的提升。

笔者认为求极限问题大致有三种表现形式：

➤ 单纯求极限问题 (包括以极限定义的函数)
➤ 渐近线问题
➤ 间断点问题

这些将在举例中具体说明 (均是期末真题哦)，同时不要忘了关注注记的内容。

1.1.2 例题分析

单纯极限问题

练习 1

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}$。

分析

这是相对简单的求极限问题，既可以利用等价无穷小替换与 $L'H\hat{o}pital$ 法则，也可以等价无穷小结合 $Taylor$ 公式使用。下面给出两种解法。

解法 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2} \tag{1.1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{2x} \tag{1.2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x}{2} \tag{1.3}$$
$$=1 \tag{1.4}$$

解法 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2} \tag{1.5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(x+o(x^2))-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2} \tag{1.6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} \tag{1.7}$$

$$=1 \tag{1.8}$$

练习 1 升级

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t)\,dt}{\cos x\int_0^x\ln^2(1+t)\,dt}$

分析

这道题属于较为复杂的求极限问题，一是有变上限积分，二是因式比较多。一般存在变上限积分是都可以洛，本题也一样，但是不能直接洛，不然越来越复杂，要先提出 $\cos x$ 再洛。具体过程见下。

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t)\,dt}{\cos x\int_0^x\ln^2(1+t)\,dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\tan^3 x\cdot\ln x}{\ln^2(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \tag{1.9}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\ln x}{x^2} \tag{1.10}$$

$$=1+0 \tag{1.11}$$

$$=1 \tag{1.12}$$

注记

- 对于我们学校的求极限题绝不可能轻易洛出来，能洛时要先作简化处理，懂得见好就收。
- 优先考虑等价无穷小替换。熟记常见的等价无穷小，此处不再一一列举。

下面将着重讲讲利用定积分定义求极限。

练习 2

极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})=$____.

分析

看到和式的极限我们应该首先想到用定积分的定义。这种方法的关键在于在通式中找到 $\frac{k}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 分别作为定积分里面的 x 和 $\mathrm{d}x$，这道题只需提出一个 $\frac{1}{n}$ 就解决问题了。

解

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \tag{1.13}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{1.14}$$

$$=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 \tag{1.15}$$

$$=\frac{\pi}{6} \tag{1.16}$$

练习 2 升级

极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\tan\frac{1}{n^3}=$____.

分析

本题基本思路依然是构造定积分定义，但是直接看容易找不到头绪，因为式中的 tan 让整个问题很难处理。此时不要忽略了 $\tan\dfrac{1}{n^3}$ 是和式的公因子，把它提出来再用等价无穷小代换变为 $\dfrac{1}{n^3}$，再去处理和式，问题就得以解决了。详见下。

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\tan\frac{1}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^3} && (1.17)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3}\left(k^2+\frac{2k}{n}+\frac{1}{n^2}\right) && (1.18)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^5} && (1.19)\\
&= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\cdot\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} && (1.20)\\
&= \frac{1}{3}+0+0 && (1.21)\\
&= \frac{1}{3} && (1.22)
\end{aligned}$$

注记

- 并不是所有和式极限都可以套定积分定义，比如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ 是利用夹逼准则求解的 (详细过程参见教材)，总之要在通式中整理出 $\dfrac{k}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 才能顺利使用定积分定义。
- 如果不想死记套路最好理解原理 (教材上有关定积分定义的内容)，其实由取法的任意性可以知道，上述 $\dfrac{k}{n}$ 部分有很多取法

$\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k-\frac{2}{3}}{n}, etc\right)$，而 $\frac{1}{n}$ 也仅仅适用于长度为 1 的区间。但最常出现的是 $\frac{k}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 对应 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

➤ 定积分定义有时也和夹逼准则一起使用。

下面将介绍夹逼准则的应用。

练习 3

证明对任意正整数 p, 函数极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\,\mathrm{d}t$ 存在。(本题摘录自一个大题，前问已证明 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x = n^2\pi$)

分析

一般此类看上去没有思路的题，要去思考上一问的结论或者是思想方法，即进行换元处理：

$$I_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x \overset{t=n\pi-x}{=} \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|\,\mathrm{d}t \tag{1.23}$$

$$= n\pi\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t - I_n \tag{1.24}$$

$$= n^2\pi\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t - I_n \tag{1.25}$$

$$\therefore I_n = n^2\pi \tag{1.26}$$

既然第一问积分上限给出的是整数倍 π，我们自然可以想到利用夹逼准则用整数倍 π 去夹 x，这样我们可以把积分算出来，一旦左右结果相等，便得证了。详细过程见下。

解

仿照分析里面的做法，我们做一个预备工作：

$$I_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x|^p \,\mathrm{d}x \overset{t=n\pi-x}{=} \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|^p \,\mathrm{d}t \tag{1.27}$$

$$= n\pi \int_0^{n\pi} |\sin t|^p \,\mathrm{d}t - I_n \tag{1.28}$$

$$= n^2\pi \int_0^{\pi} \sin^p t \,\mathrm{d}t - I_n \tag{1.29}$$

$$\therefore I_n = \frac{n^2\pi}{2} A \left(令 \int_0^{\pi} \sin^p t \,\mathrm{d}t = A \right) \tag{1.30}$$

此处令为 A 的操作，是因为我们可以证明 $\int_0^{\pi} \sin^p t \,\mathrm{d}t$ 一定存在 (此处略去)。
接下来进入正式解题：
令 $n = \left[\frac{x}{\pi}\right]$，则：

$$\frac{1}{(n+1)^2\pi^2} \int_0^{n\pi} t|\sin t|^p \,\mathrm{d}t < \frac{1}{x^2} \int_0^{x} t|\sin t|^p \,\mathrm{d}t < \frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|^p \,\mathrm{d}t \tag{1.31}$$

$$\frac{n^2 A}{2(n+1)^2\pi} < \frac{1}{x^2} \int_0^{x} t|\sin t|^p \,\mathrm{d}t < \frac{(n+1)^2 A}{2n^2\pi} \tag{1.32}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 A}{2(n+1)^2\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 A}{2n^2\pi} = \frac{A}{2\pi} \tag{1.33}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^{x} t|\sin t|^p \,\mathrm{d}t = \frac{A}{2\pi} \tag{1.34}$$

证毕。

注记

- 这类题是难题，做不对也不用气馁哦。
- 这道题排版尤其不容易，如果觉得写得不错就把这本资料分享给更多小伙伴吧！

补充训练

还有一些思路比较特殊的题在这里一并呈现给大家，说不定期末考试就考了呢(*^_^*)。

练习 4

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})=$ ____.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(5x^2-3x+1)}{\ln(x^3+2x^2-3)}=$ ____.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)=$ ____.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x\right]=$ ____.

解

这些问题此处都不细讲，下面给出答案：

(1) 0;　(2) $\dfrac{2}{3}$;　(3) 0;　(4) $\dfrac{2}{\pi}$

渐近线问题

练习 5

曲线 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ 的渐近线有____ 条。

分析

渐近线的题目相对来说套路固定，无非就是分别研究竖直、水平、斜渐近线，详见下。

解

1. 竖直渐近线：很容易知道 $x=0$ 是唯一的竖直渐近线。
2. 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty}x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=+\infty$，故正无穷处没有水平渐近线。且 $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=-\infty$，故负无穷处也没有水平渐近线。
3. 斜渐近线：$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}}{x}=1, b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=0$，故正无穷处斜渐近线是 $y=x$。
   下面再来考察负无穷处的斜渐近线
   $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}}{x}=1$，$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=-1$，故负无穷处斜渐近线是 $y=x-1$。

综上，渐近线一共 3 条。

注记

- 这道题其实没有什么技术含量，但是易错，因为求斜渐近线的时候我们通常只考虑一个无穷，就会漏一条，所以我们在研究渐近线问题的时候一定要细心一点，一步一步来。
- 某些求斜渐近线的问题难的根本原因是极限本身难求，这里就不展开讲了。

间断点问题

练习 6

设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x|(x^2-1)}$，试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型。

分析

对于这种非分段函数的间断点问题，我们一般关注没有定义的点，在没有定义的点研究左右极限，判断间断点类型。注意：不能直接把分子分母的公因子 $x+1$ 约去，因为这样会漏解。

解

首先没有定义的点为 $x=0, x=1, x=-1$

1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=1$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=-1$，故 $x=0$ 是一个第一类间断点 (跳跃间断点)
2. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=-\infty$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-1)}=+\infty$，故 $x=1$ 是一个第二类间断点 (无穷间断点)
3. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=\dfrac{1}{2}$，故 $x=-1$ 是一个第一类间断点 (可去间断点)

练习 6 升级

函数 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的间断点个数是 (　　)。

$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

分析

这道题处理方法与上一道题没有区别，但是容易漏 $x=-1$ 这个间断点。

解

间断点是 $x=1, x=-1, x=0, x=2$ 共四个，故选 D。

注记

- 以上间断点问题实际上是求函数定义域与研究极限的问题，不要漏哦！
- 还有一类不常考的题是已知间断点类型去反推函数中参数的值，教材上有对应的题目可以参考。

§1.2 含参的极限问题

1.2.1 概述

此类题在期末考试中出现频率适中，主要是以带参数的极限等式与无穷小的阶出现，思路方法和求极限差别不大，具体的一些注意事项将在例题分析中讲到。

1.2.2 例题分析

带参数的极限等式

此类题一般是已知极限的值，反过来求极限式中参数的值，有一些常用的思想方法将在注记中展示。

练习 1

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1$(其中 a, b 为常数)，则 (　　)

$A.a=0, b\in R$　　　　$B.a=0, b=1$

$C.a\in R, b=1$　　　　$D.a\in R, b\in R$

分析

这是最简单的问题，只是作为引子引入，相信大家没有问题。(*^_^*)

解

我们可以闭眼选 B

练习 1 升级

确定常数 a, b, c 的值，使下面极限等式成立：

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$$

分析

这道题是很经典的题，同时也是一道有难度的题，因为题干信息少，未知参数多。这时我们就要善于从已知等式中建立更多的等式来将未知参数一个一个解出来。

解

1. 分母在该趋向下是趋于 0 的，而极限值是一个常数，故分子在该趋向下也一定趋与 0，得到 $\lim\limits_{x\to 1} a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}=0$，得到 $c=2$。
2. 这时把 $c=2$ 代入原式，继续研究。由无穷小的关系我们立即可以得到 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{x-1}=0$，故 $b=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$。
3. 下面再把 $b=\dfrac{1}{2}$ 代入原式，直接研究原极限，可以得到 $a=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{16}$

注记

- 可以看到比较难的这类问题像是一个逐个击破的过程。
- 从上面可以积累这类题的两种比较典型的处理方法，一种是分母趋于 0，分子趋于 0；一种是分子是 $(x-1)^2$ 的高阶无穷小，也一定是 $x-1$ 的高阶无穷小。事实上这些关系都可以从有理运算法则得出来，不用

死记硬背。

无穷小的阶

此类题一般是已知 A 是 B 的同阶无穷小，求 A 或 B 中参数的值，与求极限的过程大致一致。

练习 2

若当 $x \to 0$ 时，两个函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin\left(t^2\right) \mathrm{d}t$ 与 $g(x) = x^k\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$ 是同阶的无穷小量，则常数 k 的值为 ____。

分析

无穷小的阶是由两式作比的极限来确定的，所以我们应该先写出研究的极限。这里涉及变限积分，我们就用洛必达法则研究该极限，再利用等价无穷小替换化简到我们可以肉眼看出 k 的值为止。

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^k\left(\mathrm{e}^x-1\right)} \tag{1.35}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^{k+1}} \tag{1.36}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2 x\right)}{(k+1)x^k} \tag{1.37}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(k+1)x^k} \tag{1.38}$$

要使(1.38)是一个非 0 常数，那么分子分母的次数应该相等，易知 $k = 2$。

注记

- 这类题要用等价无穷小替换灵活进行化简，一般朝多项式函数替换，这样最后凭肉眼就可以观察出来。

§1.3 数列收敛证明与极限求解

1.3.1 概述

此类题一般是给出一个数列的通项或者递推，要求证明其收敛并求其极限。对于常规的题目由几乎固定的解决方法，将在分析中谈到，对于特殊的题目又有不同的方法。

1.3.2 例题分析

练习 1

设 $0 < x_1 < 3$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}(n = 1, 2, \cdots)$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

分析

这是一道常规题，可以大致遵循如下步骤：

1. 既然极限一定存在，又给出了递推关系，我们可以很容易地求出极限 (等式两边同时取极限) 为 $\frac{3}{2}$。
2. 接下来我们可以从 x_1 开始迭代，看看 $x_2, x_3, \cdots$ 的范围，发现它们都在 $\left(0, \frac{3}{2}\right]$ 上，那么，只要我们再证得该数列单调增，整个问题就解决了。
3. 我们再用前项比后项的方法研究单调性，发现是单调增的。

将第一步写到后面，就是整道题的解答了。

解

$x_2 = \sqrt{x_1(3 - x_1)} \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$

假设 $x_n \in \left(0, \frac{3}{2}\right] (n \geqslant 2)$，下证 $x_{n+1} \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$：

由二次函数性质可知，当 $x_n \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ 时，$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$，则 $n \geqslant 2$ 时，$x_n \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$。

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3 - x_n}{x_n}}$，当 $x_n \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ 时该式大于等于 1。故该数列单调增。

综上，该数列单调增有上界，则该数列收敛。

在等式两边同时取极限，求得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$。

练习 1 升级

设 $a_1 = 1$，$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1} + 1}(n = 1, 2, \cdots)$。证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

分析

这道题若套用常规的解法则解不出来，因为这个数列不是单调的，但它的奇偶子列是单调的，而且收敛于同一个极限，我们只要求出隔项递推就可以解决这个问题。

解

由题可知，$a_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2(2a_{n-2}+3)}(n \geqslant 3)$

1. n 为奇数时，$a_1 = 1 < \sqrt{2}$
   假设 $a_n < \sqrt{2}$，下证 $a_{n+2} < \sqrt{2}$：
   由 $a_{n+2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2(2a_n+3)}$ 可得，$a_{n+2} < \sqrt{2}$。
   故 $a_n < \sqrt{2}(n$ 为奇数)。
   又 $a_{n+2} - a_n = \dfrac{2(2-a_n^2)}{2a_n+3}$，$a_n < \sqrt{2}$，则 $a_{n+2} - a_n > 0$，即单调增。
   综上，奇子列收敛，极限为 $\sqrt{2}$。
2. n 为偶数时，$a_2 = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$
   假设 $a_n > \sqrt{2}$，下证 $a_{n+2} > \sqrt{2}$：
   由 $a_{n+2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2(2a_n+3)}$ 可得，$a_{n+2} > \sqrt{2}$。
   故 $a_n > \sqrt{2}(n$ 为偶数)。
   又 $a_{n+2} - a_n = \dfrac{2(2-a_n^2)}{2a_n+3}$，$a_n > \sqrt{2}$，则 $a_{n+2} - a_n < 0$，即单调减。
   综上，偶子列收敛，极限为 $\sqrt{2}$。

综上，由归并原理可知，$\{a_n\}$ 收敛，且极限为 $\sqrt{2}$。

注记

- 一般步骤：数学归纳法研究每一项的范围 → 利用递推和范围研究单调性 → 求极限。(很多时候每一项的范围与这个数列的极限息息相关，所以先求出极限，才好定范围)
- 当你实在没有思路的时候，找递推求极限总是很简单的，所以不要放弃 (~~骗分~~) 呀！

第二章

§2.1　求导数、函数性态研究、微分

这一类问题一般不会太难，有时单独出现也有时作为综合题里面的一个考察点。

2.1.1　知识点小结

- ➤ 基本初等函数的导数公式，导数运算法则
- ➤ 利用导数判断连续性
- ➤ 复合函数求导、反函数求导、高阶导数的求法、隐函数求导、参数方程求导
- ➤ 单调性、凹凸性拐点的判定：
- ➤ 判断极值点的第一、第二第三充分条件
- ➤ 最大最小值的求法
- ➤ 微分的定义、几何意义
- ➤ 可导、可微与连续的关系

2.1.2　例题

练习 1

设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$, 则 (　　)。

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

分析

对这一类题目来说提取完整题目的信息是很重要的。

提取信息:

问题:

1. $f(x)$ 二阶导连续:$f(x)$,$f'(x)$,$f''(x)$ 都连续
2. $x=0$ 时导数为零:$x=0$ 是驻点
3. 一个关于二阶导在 $x=0$ 时的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$

选项: 关于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的性态: 极值拐点
下面就根据提取出的信息来推导出判断极值、拐点的条件即可。

解

$\lim\limits_{x\to0} f''(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}\cdot\lim\limits_{x\to0}|x|=0$，$x=0$ 可能是拐点
由保号性, $\exists\delta>0,\forall x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f''(x)}{|x|}\geq q>0, f''(x)>0, f'(x)$ 单调递增
那么, 当 $x\in(-\delta,0)$ 时, $f'(x)<f'(0)=0, f(x)$ 递减；$x\in(0,\delta)$ 时,
$f'(x)>f'(0)=0, f(x)$ 递增
显然, $x=0$ 是一个极小值点。
但是当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, $f''(x)\geq0$, 显然 $x=0$ 不是拐点。
选 B。

下面列了几道基础题给大家练个手。

练习

1、对 t 取不同的值，讨论函数 $f(x)=\dfrac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t,+\infty)$ 上是否有最大值或者最小值？若存在最大值或最小值，则求出相应的最大值和最大值点，或者最小值和最小值点。
2、设 $f(x)=\begin{cases} x, x<0 \\ 2^x, x\geq0 \end{cases}$，求导函数 $f'(x)$。
3、已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$ $(t\geq0)$
(1) 讨论曲线 L 的凹凸性;
(2) 过点 (-1,0) 引曲线 L 的切线，求切点坐标 (x_0,y_0), 并求切线的方程;
(3) 求此切线与曲线 L (对应于 $x<x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S。
4、设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则 (　　)。
A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$
B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$
C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$

D. $dy < \Delta y < 0$

答案

1、$f'(x) = \dfrac{2(x+2)(1-x)}{\left(2+x^2\right)^2}$，驻点 $x_1 = -2$，$x_2 = 1$

(1) 当 $t \le -2$ 时 $m(t) = f(-2) = -\dfrac{1}{2}$，$m(t) = f(1) = 1$

(2) 当 $-2 \le t \le -\dfrac{1}{2}$，$m(t) = f(t)$，$m(t) = f(1) = 1$

(3) 当 $-\dfrac{1}{2} \le t \le 1$，无 $m(t)$，$m(t) = f(1) = 1$

(4) 当 $t > 1$，无 $m(t)$，$m(t) = f(t)$

2、当 $x < 0$ 时 , $f'(x) = 1$;

当$x > 0$ 时 , $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$

在 $x = 0$ 处, $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0, f\left(0^+\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 1, f(0^-) \ne f\left(0^+\right)$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续，因此在 $x = 0$ 处不可导。

故 $f'(x) = \begin{cases} 1 & ,x < 0 \\ \ln 2 \cdot 2^x & ,x > 0 \end{cases}$

3、(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2}{t} - 1$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{t} - 1\right)'}{\dot{x}} = \dfrac{-1}{t^3}$

当 $t > 0$ 时, $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故曲线 L 是凸的。

(2) 曲线 L 的直角坐标方程为 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$。当 $x_0 = 1$ 时，L 在对应点处切线方程为: $x = 1$, 不合题意。

可设 L 在点 $\left(x_0, y_0\right)$ 处切线方程为 $y - y_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x_0 - 1}} - 1\right)\left(x - x_0\right)$,

将 $x = -1, y = 0$ 代入上式得 $-y_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x_0 - 1}} - 1\right)\left(-1 - x_0\right)$

即 $\left(x_0 - 1\right) + \sqrt{x_0 - 1} - 2 = 0$

即 $\left(\sqrt{x_0 - 1} - 2\right)\left(\sqrt{x_0 - 1} - 1\right) = 0$

解得 $x_0 = 2, y_0 = 3$, 所求切点为 $(2, 3)$, 切线方程为：$y = x + 1$。

(3) 令 $y = 0$ 得 L 与 x 轴交点：$(1, 0)$，$(17, 0)$，所求面积：

$S = \int_{-1}^{2} (x+1)\, dx - \int_{1}^{2} [4\sqrt{x-1} - (x-1)]\, dx = \dfrac{7}{3}$。

4、A

§2.2 $L^{'}H\hat{o}pital$ 法则

易错点在于每一次使用之前要检查是否符合使用条件。话不多说，上例题，看看你是否踩坑了呢。

练习 1

求证：若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}。$$

错解

思路

注意到当 $h\to 0$ 时, $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$ 及 $h^2\to 0$ 且 $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$与h^2 均对 h 可导, 且 $\left(h^2\right)'=2h\neq 0$ 可以用洛必达法则。

解

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} && (2.1)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{2h} && (2.2)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2} && (2.3)\\
&= f''(x) && (2.4)
\end{aligned}$$

分析

要使 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=f''(x)$ 成立, 须 $f''(x)$ 连续, $f''(x)$ 连续性未知, 这么做不对。

正解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right] \tag{2.5}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right] \tag{2.6}$$

$$=\frac{1}{2}\left[f''(x)+f''(x)\right] \tag{2.7}$$

$$=f''(x) \tag{2.8}$$

§2.3　微分中值定理的应用

这里证明题是大头也是难点。

2.3.1　方法总结

对证明题的方法（不完全）总结如下：

- 直接应用拉格朗日定理
- 有两个未知量的不等式：用两次不同的中值定理/分两段/对两个不同的函数使用相同的中值定理
- 构造函数再应用拉格朗日定理

2.3.2　例题

直接应用拉格朗日定理

练习 1

若 $f(x)$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$c\in(a,b), f(c)<0$。求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)>0$。

分析

这里考虑用拉格朗日定理，求二阶导需要两个 $f'(x)$，而每一个 $f'(x)$ 又分别需要两个 $f(x)$。

证

由题 $a < c < b$，$f(x)$ 二阶可导，由拉格朗日定理，

$$\exists x_1 \in (a,c), f'(x_1) = \frac{f'(c) - f'(a)}{c - a} < 0 \tag{2.9}$$

$$\exists x_2 \in (c,b), f'(x_2) = \frac{f'(b) - f'(c)}{b - c} > 0 \tag{2.10}$$

$f'(x)$ 连续，由拉格朗日定理

$$\exists \xi \in (a,b), f'(\xi) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \tag{2.11}$$

得证。

有两个未知量的不等式：用两次不同的中值定理

练习 2

已知 $0 < a < b$，求证：$\exists \xi, \eta \in (a,b), abf'(\xi) = \eta^2 f'(\eta)$。

分析

这是有两个未知量的的证明，η 在导数符号内外都有出现，所以考虑用两个不同的中值定理。
对等式中单独出现的未知量用柯西中值定理，把等式右边化成两个导数之比的形式，我们可以把 η^2 放到分母的位置上，就是

$$\eta^2 f'(\eta) = \frac{f'(\eta)}{(-\frac{1}{\eta})'} = \frac{f(b) - f(a)}{-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} = ab\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2.12}$$

又由 *Lagrange* 中值定理得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2.13}$$

则

$$abf'(\xi) = ab\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \eta^2 f'(\eta) \tag{2.14}$$

有两个未知量的不等式：分两段

练习 3

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1，x_2，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$。

分析

含有一阶导数、有两个未知数，优先考虑 *Lagrange* 中值定理, 两个点 x_1,x_2 只在导数符号中出现, 所以采用将区间分成两段的方法。可以先尝试加入一个分点 $c\in(0,1)$, 自然而然地有：

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-0}{c-0} \tag{2.15}$$

$$f'(x_2)=\frac{1-f(c)}{1-c} \tag{2.16}$$

其中 $x_1\in(0,c)$,$x_2\in(c,1)$
现在我们可以计算 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_1)}$：

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{c-0}{f(c)-0}+\frac{1-c}{1-f(c)} \tag{2.17}$$

则有：

$$\frac{c-0}{f(c)-0}+\frac{1-c}{1-f(c)}=2 \tag{2.18}$$

不难观察出 $f(c)=\dfrac{1}{2}$, 再由介值定理可以知道这样的 c 是可以找到的。至此，本题解决，写过程的时候倒过来写一遍即可。

证

由介值定理可知，$\exists c\in(0,1), f(c)=\dfrac{1}{2}$
则

$$\exists x_1\in(0,c), f'(x_1)=\frac{f(c)-0}{c-0} \tag{2.19}$$

$$\exists x_2\in(c,1), f'(x_2)=\frac{1-f(c)}{1-c} \tag{2.20}$$

此时

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{c-0}{f(c)-0}+\frac{1-c}{1-f(c)}=2 \tag{2.21}$$

得证。

练习 3 升级

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1，x_2，使得 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$。

分析

有了上文的铺垫，很容易想到构造 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$(或$\dfrac{b}{a+b}$) 解决问题。

证

与上文完全类似，请读者自行完成.

对两个不同的函数使用相同的中值定理

练习 4

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：

$$\exists \xi,\eta\in(a,b), \mathrm{e}^{a+b}[f(\eta)-f'(\eta)]=\mathrm{e}^{\xi+\eta}。$$

分析

这也是有两个变量的证明。将含 η 的项整理到一边，发现两边都可以使用 *Lagrange* 定理进行代换。这一类题目就是对不同函数用相同中值定理代换。即：

$$\mathrm{e}^{a+b}[f(\eta)-f'(\eta)]=\mathrm{e}^{\xi+\eta} \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{a+b}\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-f'(\eta)]=\mathrm{e}^{\xi} \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{a+b}\frac{\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}}{b-a}=\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a} \tag{2.24}$$

这是一个恒等式，表明原式得证了.

构造函数

注记

- 当需要构造的函数是 $g(x) = x^a f(x)$ 时，题目中往往会把 $g'(x)$ 中的 x^{a-1} 消去来增加难度，大家要擦亮眼睛哦.
- ~~实在想不到了可以用微分方程硬解出来，相信各位大佬一定用不上。~~

练习 5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to1_-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$。求证：$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f''(\xi)=f(\xi)$。

分析

$f(x)$ 二阶可导、$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，这种条件相信大家已经很熟悉了，可以得出 $f(0)=f(1)=0$，用洛必达法则可以求出
$f'(0)=1, f'(0)=2$，现在还不知道有没有用，先放在这里。
要证明的结论是一个既有二阶导又有原函数的式子，我们考虑把
$f(\xi)-f''(\xi)$ 构造成一个函数的导数。但是原函数有 $f(x)$，求导就一定会有 $f'(x)$，这里我们可以利用 e^x 求导不变的性质来消去 $f'(x)$。构造函数
$g(x)=\mathrm{e}^x(f(x)-f'(x))$, 易得 $g(0)=-1<0, g(1)=-2\mathrm{e}<0$, 这里我们可以大胆猜一下，如果能在 $[0,1]$ 找到一个大于 0 的点，就一定存在
$f(x_1)=f(x_2), x_1, x_2\in(0,1)$。
现在我们返回去观察开始求出来的几个值，$f(0)=f(1)=0$，
$f'(0)=1, f'(0)=2$，画图可以很明显地看出一定 $\exists\xi\in(0,1), f'(\xi)<0$ 且 $f(\xi)=0$，下面用罗尔定理就可以了。

证

由 $f(x)$ 二阶可导、$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to1_-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

得 $f(0)=f(1)=0$，$f'(0)=1, f'(0)=2$

所以 $\exists\xi\in(0,1), f'(\eta)<0$ 且 $f(\eta)=0$

设 $g(x)=\mathrm{e}^x[f(x)-f'(x)]$

所以 $g(0)=-1<0, g(\eta)=\mathrm{e}^\eta[f(\eta)-f'(\eta)]>0, g(1)=-2\mathrm{e}<0$

所以 $\exists\eta_1\in(0,\eta), \eta_2\in(\eta,1)$，$g(\eta_1)=g(\eta_2)=0$

由罗尔中值定理的推论 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2), g'(\xi)=0$，即 $e^{\xi}[f(\xi)-f''(\xi)]=0$
所以 $f(\xi)-f''(\xi)=0$
即 $f(\xi)=f''(\xi)$。

注记

- 本题还可以构造 $g(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$，请读者自行完成这种方法的证明。

练习 6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)=0$, 求证：$\exists\xi\in(0,1), f''(\xi)=\dfrac{2}{1-\xi}f'(x)$。

分析

想构造函数，所求等式里面分数看着很难受，去分母移项得

$$(1-x)f''(x)-2f'(x)=0 \tag{2.25}$$

这里就是 $x^a f(x)$ 的导数两边约分之后的形式了。构造函数
$g(x)=(1-x)^2 f(x)$, 其它思路与练习 5 相似，这里就不再重复，请读者自己完成本题的证明。

练习 7

设在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，$f(0)=0$，求证：$\exists\xi\in[0,1]$ 使得
$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\,dx$。

分析

我们先看看从已知出发能得到什么。
由 $f'(x)$ 连续可得

$$m<f'(x)<M \tag{2.26}$$

对于 $f(0)=0$ 这个条件，我们可以用手头有的定理看看适不适用。罗尔定理需要两个点，柯西中值定理需要两个函数，泰勒展开需要具体的函数，都不适用。而在拉格朗日定理中，令 $a=0$ 可以得出一个简洁的式子

$bf'(\xi) = f(b)$
而 b 是任意值，我们就可以把它换成 x：

$$xf'(\xi) = f(x) \tag{2.27}$$

这就将一阶导和原函数联系起来了。两边同时积分，就有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf'(\xi)\,\mathrm{d}x \tag{2.28}$$

这就把所求等式的右端转化向 $f'(x)$ 了。
之前已经有了一个关于 $f'(x)$ 的条件：对(2.26)同时乘 x 得

$$mx < xf'(x) < Mx \tag{2.29}$$

积分，就得到了式(2.28)的范围

$$\frac{m}{2} < \int_0^1 xf'(\xi)\,\mathrm{d}x < \frac{M}{2} \tag{2.30}$$

两边同乘 2，就得到了所求等式的右端的范围

$$m < 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < M \tag{2.31}$$

而 $f'(x)$ 的范围也是 (m, M), 二者都连续，所以一定存在 ξ，满足所求等式。

证

$\because f'(x)$ 连续 $\therefore \exists m, M \in R, m \leq f'(x) \leq M$
$\therefore mx < f'(\eta)x < Mx$
$\therefore \int_0^1 mx\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f'(\eta)x\,\mathrm{d}x < \int_0^1 Mx\,\mathrm{d}x$
$\therefore \frac{m}{2} < \int_0^1 f'(\eta)x\,\mathrm{d}x < \frac{M}{2}$
$\because f(x) = f'(\eta)x$
$\therefore m < \int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x < M$
$f'(x)$ 连续 $\therefore \exists\xi \in [0, 1]$，使得 $f'(\xi) = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

第三章

§3.1 求积分

3.1.1 概述

积分作为微分的逆运算，求积分却比求微分难度大得多，所以对于考生来说，求积分是高数试卷中比较让人头疼的必考内容。想要在求积分的题目不失分，不仅要熟记书上的求积分方法，还要多加练习和提炼自己的方法。

这里列出求积分的几种基本方法。

1. 求不定积分

➤ 基本积分表（不推荐直接背书后附录的积分表）

- ❏ $\displaystyle\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$($k$ 为常数)
- ❏ $\displaystyle\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$
- ❏ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
- ❏ $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
- ❏ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\sec x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
- ❏ $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$

❏ $\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$

➤ 线性运算法则（需要注意 f, g 均可积）

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) \,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x) \,\mathrm{d}x + \beta \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

➤ 换元积分法 I(在函数中凑微分）

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \left(\int f(u) \,\mathrm{d}u\right)_{u=\varphi(x)}$$

➤ 换元积分法 II（通过换元化简根号，$ln(x)$，e^x 等无理式）

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t) \,\mathrm{d}t\right)_{x=\varphi(t)}$$

➤ 分部积分法（两种分法）

$$\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$$

2. 求定积分

➤ 定义求积分（较复杂且适用范围有限）

➤ 由几何意义求积分（适用于型如 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ 的积分）

➤ 利用奇函数和偶函数的性质

➤ 微积分基本公式（$Newton - Leibniz$ 公式）

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

➤ 与求不定积分的换元积分法和分部积分法类似

3. 求收敛的反常积分（先求积分再求极限）

➤ 无穷区间上的积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

➤ 无界函数的积分

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

3.1.2 例题详解

定积分问题

练习 1

计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \, dx$

分析

首先这是一道求定积分的题目，但是运用换元积分法和分部积分法却无法轻松解决，问题在于 $\sin x$ 与根号的组合比较难化简。所以需要想其他解决方法。这里给出一种解法：

解

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \, dx &= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \, dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \, dx && (3.1)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \, dx + 0 && (3.2)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} \, dx && (3.3)\\
&= 2 \int_{-1}^{1} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx && (3.4)\\
&= 4 - \pi && (3.5)
\end{aligned}$$

注记

- 首先观察到 $\frac{x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ 为奇函数，在对称区间内的定积分为 0
- 然后运用分母有理化化简
- 最后通过几何意义得出答案

不定积分问题

练习 2

求积分 $\int \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

分析

这是一道求不定积分的题目，带有根号和 $\ln x$ 的组合，所以这里给出一种依靠换元积分法和分部积分法的解法。

解

$$\int \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \overset{t=1+\sqrt{x}}{=} \int \ln t\,\mathrm{d}(t-1)^2 \tag{3.6}$$

$$= (t-1)^2\ln t - \int (t-1)^2\,\mathrm{d}\ln t \tag{3.7}$$

$$= (t-1)^2\ln t - \int \left(t+\frac{1}{t}-2\right)\mathrm{d}t \tag{3.8}$$

$$= (t-1)^2\ln t - \frac{1}{2}t^2 + 2t - \ln t + C \tag{3.9}$$

$$= (x-1)\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} + C \tag{3.10}$$

注记

- 求不定积分的时候不要忘记最后的常量 C
- 综合运用分部积分法和换元积分法
- 求积分的方法并不唯一，可能答案有时也不唯一，所以在做题的时候不必太在意方法，能做出来就行。

练习 3

计算积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

分析

带有齐次三角函数的不定积分问题有一种通解，就是利用三角函数的变换，

将分式上下化为 $\tan x$ 或 $\tan\frac{x}{2}$ 的形式从而换元积分。

解

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

$$= \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 9}\,\mathrm{d}x \tag{3.12}$$

$$\tag{3.13}$$

令 t=$\tan x$ 则 x=$\arctan t$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+1}{t^2+9}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \tag{3.14}$$

$$= \int \frac{1}{t^2+9}\,\mathrm{d}t \tag{3.15}$$

令 $u = \frac{1}{3}t$ 则 $t = 3u$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{3}\arctan u \tag{3.17}$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan x\right) \tag{3.18}$$

注记

- ➤ 利用换元积分法，一定要回代

练习 4

求积分 $\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x$

分析

这是一道求反常积分的题目，观察到函数在 $x = 2$ 的邻域发散，所以将其用线性运算性质分开。

解

$$\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x \tag{3.19}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1} \ln\frac{\pi}{2-x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^{3} \ln\frac{\pi}{x-2}\,\mathrm{d}x\right) \tag{3.20}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1} \ln\frac{\pi}{2-x}\,\mathrm{d}x \tag{3.21}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1} (\ln\pi - \ln(2-x))\,\mathrm{d}x \tag{3.22}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} x\ln\pi\Big|_1^{2-\varepsilon_1} + \int_1^{2-\varepsilon_1} \ln(2-x)\,\mathrm{d}(2-x) \tag{3.23}$$

$$\overset{t=2-x}{=} \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}(1-\varepsilon_1)\ln\pi + \int_1^{\varepsilon_1} \ln t\,\mathrm{d}t \tag{3.24}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[(1-\varepsilon_1)\ln\pi + (t\ln t - t)\Big|_1^{\varepsilon_1}\right] \tag{3.25}$$

$$= \ln\pi + 1 \tag{3.26}$$

注记

- 可以利用函数的对称性或周期性简便计算 (本例中观察到函数关于 $x = 2$ 对称)
- 求反常积分最终总能转化为求极限问题 (~~所以回到第一章重新看看吧~~)

§3.2 定积分的应用

3.2.1 概述

在试卷中，定积分的应用常常以求旋转体体积，求平面图形的面积，应用题等形式出现。解决算体积，面积题目的方法相对固定，分为两步。

1. 将区间 $[a, b]$ 分割，用均匀变化取代非均匀变化 (化曲为直) 得到局部微元。
2. 把局部微元相加 (积分) 就能得到积分表达式
3. 最后求解定积分得出答案。(~~求不出来的，去上面从头看起~~)

3.2.2 例题分析

求旋转体体积

练习 1

将圆周 $x^2 + y^2 = 4x - 3$ 绕 y 轴旋转一周，求所得旋转体的体积。

分析

圆的方程转化为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$，用 $\mathrm{d}x$ 作为微元并不好求，换成 $\mathrm{d}y$ 就比较好求，之后只需套用方法即可。

解

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi \left(2 + \sqrt{1-y^2}\right)^2 \mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \pi \left(2 - \sqrt{1-y^2}\right)^2 \mathrm{d}y && (3.27) \\ &= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \mathrm{d}y && (3.28) \\ &= 4\pi^2 && (3.29) \end{aligned}$$

注记

- 在计算中形式相近的积分表达式时，可以考虑先化简 (合并) 再计算
- 再次利用几何意义求积分 (没看出来的也不要紧，能算出来就行)

§3.3 变上限积分函数

3.3.1 概述

在本质上，变上限积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个以 $x=a$ 为零点的原函数。在应用和解题时需要注意以下几方面：

- 一般变上限积分不太好直接处理，需要求微分简化
- 被积函数的变量是可以任意替换的，$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 就是 $\int_a^x f(m)\,\mathrm{d}m$
- 在求微分的时候，看清楚右边是否含有自变量，就是出现 $\int_a^x f(x+t)\,\mathrm{d}t$ 的情况，如果出现这种情况一般采用拆分和换元的方法解决
- 积分上限不是 x 而是 $f(x)$ 的情况十分类似，书上有详细介绍，这里不加赘述。

3.3.2 例题分析

变上限积分函数

练习 1

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间和极值。

分析

要求单调区间和极值，所以需要对函数求导，而这道题的被积函数中出现了自变量 x，所以采用拆分的方法来处理该变上限积分函数。

解

$$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.31}$$

$$f'(x)=x^2(2x\mathrm{e}^{-x^4})+2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-2x(x^2\mathrm{e}^{-x^4}) \tag{3.32}$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.33}$$

可以观察到，$f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm1$，由于 $f'(x)$ 的被积函数恒正，所以很容易看出正负。

x	(-∞,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,+∞)
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

由图表易得答案：单调增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$，极小值为 $f(\pm 1)=0$, 极大值为 $f(0)=\int_1^0 -te^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

注记

- ➤ 求导的时候把变上限积分看成一个关于 x 的函数，综合利用求导法则
- ➤ 一定要把被积函数里的“x”拆分出来。

§3.4 积分相关的证明

3.4.1 概述

证明题，懂得都懂。需要极强的观察能力和构造能力。

3.4.2 例题分析

练习 1

已知等式两边的积分都收敛，且 $a,b>0$，求证：

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$$

分析

一步精妙的换元，串联左右两式。

证

令 $x=\frac{1}{2a}\left(t+\sqrt{t^2+4ab}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t$

$$I=\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.35}$$

令 $t=-u$

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t\\&+\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{-t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t \tag{3.37}$$

得证。

注记

- 利用换元积分法求定积分或者反常积分时，时刻注意自变量的范围
- 不会的话也不要气馁 (这题想不到很正常)

第四章

§4.1 一阶微分方程

4.1.1 方法指引

1. 分离变量法：这是其他一切方法的基础，就是将微分方程整理成 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$ 这种形式。
2. 套公式法：可以直接套用书上的通解公式：
   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为：$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$
3. 变量代换法：用新的变量代换原来的变量，起到降阶、简化的作用。
   - $u = \frac{y}{x}$(齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的代换)
   - $u = y^{1-\alpha}$($Bernoulli$ 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}(\alpha \neq 0, 1)$ 的代换)
   - $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$(对高阶微分方程 $y'' = f\left(x, y'\right)$ 和 $y'' = f\left(y, y'\right)$ 进行降阶)
   - 其他灵活的代换如 $u = x + y, u = xy$ 等等

4.1.2 例题讲解

练习 1

微分方程 $y\ln y\,\mathrm{d}x + (x - \ln y)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解是 ____。

分析

本题 y 与 x 互相缠绕，无法分离变量，而且还有 $\ln y$ 的存在，使得题目更加不好处理，必须要变量代换。那么我们可以先将最麻烦的 $\ln y$ 用 u 代换。则原方程可化为: $yu + (x-u)yu' = 0$，显然 y 不等于 0，则：$u + (x-u)u' = 0$，依然无法分离变量，则再次代换：$z = x - u$，化简得：$x = zz'$，可以解方程了。

解

令 $u = \ln y$，则：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

则原方程化为：$yu + (x-u)y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$

又 $y \neq 0$，则：$u + (x-u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0$

令 $z = x - u$，则：$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
则

$$\begin{aligned} x - z + z\left(1 - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ x\,\mathrm{d}x &= z\,\mathrm{d}z \\ \frac{1}{2}x^2 &= \frac{1}{2}z^2 + C \\ z^2 &= x^2 + C \\ (x - \ln y)^2 &= x^2 + C \end{aligned}$$

注记

➤ 本题用了 2 次变量代换，都是为了简化方程，使得其可以用分离变量来解题，下面再来看一道用变量代换降阶的例题。

练习 2

求微分方程 $(y+1)y'' + (y')^2 = (1 + 2y + \ln y)y'$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的解。

分析

此题先变量代换：$p = y'$ 可得 $(y+1)pp' + p^2 = (1 + 2y + lny)p$，于是可化为常规形式：$p' + \frac{1}{y+1}p = \frac{1 + 2y + \ln y}{y+1}$ 则可以通过套公式解得：$p = \frac{1}{y+1}\left(y^2 + y\ln y + C_1\right)$ 可以先通过代初值条件，将常数 C_1 解得，即 $C_1 = 0$。则 $y' = \frac{1}{y+1}\left(y^2 + y\ln y\right)$，分离变量得：$\frac{1 + \frac{1}{y}}{y + \ln y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$，对于 dy 前面的项不好处理，但此时我们发现它为分数形式，故我们可以先猜其为 $\ln(y + \ln y)$ 的导数，然后验证发现正确，故可得最终答案。

解

方程不显含 x，记 $p = y'$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程化为：

$$(y+1)pp' + p^2 = (1 + 2y + lny)p \tag{4.1}$$

于是

$$p' + \frac{1}{y+1}p = \frac{1+2y+\ln y}{y+1} \tag{4.2}$$

$$p = \frac{1}{y+1}\left(y^2 + y\ln y + C_1\right) \tag{4.3}$$

代入 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$，得到 $C_1=0$，则

$$y' = p = \frac{1}{y+1}\left(y^2 + y\ln y\right) \tag{4.4}$$

即

$$\frac{y+1}{y^2+y\ln y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \tag{4.5}$$

$$\frac{1+\frac{1}{y}}{y+\ln y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{y+\ln y}\,\mathrm{d}(y+\ln y) = \mathrm{d}x \tag{4.7}$$

$$\mathrm{d}\ln(y+\ln y) = \mathrm{d}x \tag{4.8}$$

$$\ln(y+\ln y) = x + C_2 \tag{4.9}$$

代入 $y(0)=1$，得到 $C_2=0$ 所求的解为

$$\ln(y+\ln y) = x \tag{4.10}$$

注记

➤ 在解微分方程时，遇到 $\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}$ 的形式时，可以猜解为 ln(分母) 的形式，然后验证，说不定就对了呢。

有时微分方程还会与变上限积分结合，这类题虽然穿着变上限积分的马甲，但是只要多次求导，将变上限积分化为对应的导函数，就变成了普通的微分方程形式了。

练习 3

设函数 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，求 $y=y(x)$，使得：
$x\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\int_0^x t y(t)\,\mathrm{d}t$。

分析

这类题求导即可化为对应的微分方程。需要注意对 $x\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$ 的求导相当于是对乘积形式的求导。

解

两边求导得：

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + xy(x) = \int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t + (x+1)xy(x) \tag{4.11}$$

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t + x^2y(x) \tag{4.12}$$

再次求导得：

$$y(x) = xy(x) + 2xy(x) + x^2y'(x) \tag{4.13}$$

$$(1-3x)y(x) = x^2y'(x) \tag{4.14}$$

$y(x)=0$ 时，满足方程。
$y(x)\neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1-3x}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{4.15}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} - 3\ln|x| + C \tag{4.16}$$

$$y = \frac{C}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \tag{4.17}$$

其中 C 为任意常数。

§4.2 高阶微分方程

4.2.1 方法指引

1. 记住课本上的关于常系数高阶微分方程的解的对应的形式。
2. 简单的特解可以先猜出来，然后验证。
3. 若出现了单独的 x^n 的形式，一定要联想到重根。
4. 牢记非齐次方程的两个特解相减就是对应的齐次方程的通解。

4.2.2 例题精讲

常系数类

练习 1

设三阶常系数齐次微分方程的特解为 $3t^2$，求该方程及通解。

分析

题目明确指出了“三阶”“常系数”“齐次”，故我们可以通过对比解的形式，联想到，只有在 0 为特征方程的解，且为方程的三重根时，才能出现 t^2 的形式又因为该方程为三阶，故 0 即为特征方程的三重根。至此，破题。

解

由题可知：此方程的特征方程为：$\lambda^3 = 0$
所以原方程为：$y''' = 0$
故通解为：$C_1 + C_2 t + C_3 t^2$

练习 1 升级

下列选项中，不是某个二阶常系数线性微分方程的一组解的是 (　　)。

$A.\mathrm{e}^x + x, \quad x - 2\mathrm{e}^{-2x}, \quad \mathrm{e}^{-2x} + x$
$B.\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}, \quad 2x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x, \quad x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}$
$C.\mathrm{e}^x - x + 1, \quad 2 - x, \quad \mathrm{e}^x - x$
$D.x(\mathrm{e}^x + 1), \quad x\mathrm{e}^x - 2e^{-x}, \quad x\mathrm{e}^x + 2x + 2\mathrm{e}^{-x}$

分析

题目中指出了“二阶”“常系数线性”，从选项中我们可以发现：每一个选项中，三个解一定有着一个公共项，这就是我们的突破口，我们可以大胆假设它为特解，那么任意两个解相减就得到了通解。这样我们逐一验证选项后，发现 D 选项中，通解中存在了单独的 x，则特征方程必须得有 0 为二重根，矛盾，故 D 错误。

解

D

注记

- 在解决这种只给了解而不知道具体原方程的类型的题目时，要学会利用解的特点，以及两个解相减可得通解的方法，来找出重根和原特征方程，从而破题。

非常系数类

下面我们主要以二阶微分方程为例，先以一个证明引入：

练习 2

设 $x_1(t)$ 为 $\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0$ 的一个非零解，证明：使用 $x(t) = x_1(t)E(t)$ 可将二阶方程化为一阶方程。($E(t)$ 不为常数)

证

设 $x(t) = x_1(t)Z(t)$ 为该方程的解，则：

$$\dot{x}(t) = \dot{x_1}(t)Z(t) + x_1(t)\dot{Z}(t) \tag{4.18}$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x_1}(t)Z(t) + 2\dot{x_1}(t)\dot{Z}(t) + x_1(t)\ddot{Z}(t) \tag{4.19}$$

则代入原方程化简得：

$$[\ddot{x_1}(t) + a_1(t)\dot{x_1}(t) + a_2(t)x_1(t)]Z(t) + [2\dot{x_1}(t) + a_1(t)x_1(t)]\dot{Z}(t) + x_1(t)\ddot{Z}(t) = 0 \tag{4.20}$$

又 $x_1(t)$ 为原方程的解，故 $Z(t)$ 前的系数为 0

令 $u(t) = \dot{Z}(t)$，则：

$$x_1(t)\dot{u}(t) + [2\dot{x_1}(t) + a_1(t)x_1(t)]u(t) = 0 \tag{4.21}$$

化为了一阶微分方程。

在此基础上，我们可以通过解这个一阶微分方程，得到题目中二阶微分方程的通解。

求通解：

$$\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{2x_1(t) + a_1(t)x_1(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t \tag{4.22}$$

$$\ln|u| = -\int\left[\frac{2\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} + a_1(t)\right]\mathrm{d}t \tag{4.23}$$

$$= -\ln x_1^2(t) - \int a_1(t)\,\mathrm{d}t + C_1 \tag{4.24}$$

$$\therefore \dot{Z}(t) = u(t) = C_1\frac{1}{x_1^2(t)}\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t} \tag{4.25}$$

$$\therefore x(t) = x_1(t)\left[C_1\int\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t}}{x_1^2(t)}\,\mathrm{d}t + C_2\right] \tag{4.26}$$

当我们熟记这个公式后 (虽然很难)，就可以快速解决下面这道题了。

练习 3

验证 $x = \frac{\sin t}{t}$ 是微分方程 $\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = 0$ 的解，并求通解。

解

将 $x = \frac{\sin t}{t}$ 代入原方程可知满足，故是原方程的解。
套用上面的结论，有：

$$x(t) = \frac{\sin t}{t}\left[C_1\int\frac{\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t}}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t + C_2\right] \tag{4.27}$$

$$= C_1\frac{\cos t}{t} + C_2\frac{\sin t}{t} \tag{4.28}$$

注记

- 通常这种非常系数类的微分方程，只会出二阶的形式，在有了上面的公式帮助下，以后我们可以先猜一个简单的可能解，验证一下，如果对的话，直接套上面的公式，则另外一个线性无关的解也就得到了，

§4.3 线性微分方程组

4.3.1 概述

此部分的概念及理论层面有些抽象，同学们在学到此部分时往往处于懵逼状态，如坠雨雾之间，不得其法。但是，实际上此部分在考试题中考察的内容非常简单，基本上是在考察线代的知识，故大家不用过于深究前面的理论部分，只用做几道例题即可 (甚至线代大佬连例题都不需要做)。

4.3.2 必备知识点与例题讲解

常系数齐次线性微分方程组

1. 若系数矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\vec{x}$ 的基解矩阵为：$\mathbf{X}(t) = \left[\vec{r}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \vec{r}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \vec{r}_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right]$。(也包含了重特征值的代数重数等于几何重数的情况)
2. 若 $\mathbf{A}$ 没有 n 个线性无关的特征向量

定理 1 若 λ_i 为 $\mathbf{A}$ 的 n_i 重特征值，则其对应 n_i 个线性无关的解，每个解的形式如下：

$$\vec{x}(t) = \left[\vec{r}_0 + \frac{t}{1!}\vec{r}_1 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\vec{r}_{n-1}\right] \tag{4.29}$$

其中 $\vec{r}_0$ 满足：$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{n_i} \vec{r}_0 = \vec{0}$，且对于代数重数为 n_i 的 λ_i，由此方程总可以解出 n_i 个线性无关的 $\vec{r}_0$

对于每一个 $\vec{r}_0$，由下面递推关系依次解出 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots$：

$$\vec{r}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\vec{r}_{i-1} \tag{4.30}$$

再依次代入(4.29)即可。

3. 若特征值中出现复数，则复数解中的实部与虚部也为分别方程中的解。(先用欧拉公式化简)

练习 1

求下列微分方程组的解。

$$(1)\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\vec{x} \qquad (2)\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{x}$$

解

(1) 由 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$ 得：

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2 \tag{4.31}$$

$\lambda=1$ 时，由 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\vec{x}=\vec{0}$ 得：

$$\vec{r}_{01}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\vec{r}_{02}=(0,1,0)^{\mathrm{T}} \tag{4.32}$$

则有：

$$\vec{r}_{11}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})\vec{r}_{01}=(0,0,0)^{\mathrm{T}} \tag{4.33}$$

$$\vec{r}_{12}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})\vec{r}_{02}=(1,0,0)^{\mathrm{T}} \tag{4.34}$$

故：

$$\vec{x}_1(t)=\mathrm{e}^t(1,0,0)^{\mathrm{T}} \tag{4.35}$$

$$\vec{x}_2(t)=\mathrm{e}^t[(0,1,0)^{\mathrm{T}}+t(1,0,0)^{\mathrm{T}}] \tag{4.36}$$

$\lambda=2$ 时，由 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\vec{x}=\vec{0}$ 得：

$$\vec{r}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}} \tag{4.37}$$

故：

$$\vec{x}_3(t)=\mathrm{e}^{2t}(0,0,1)^{\mathrm{T}} \tag{4.38}$$

故通解为：

$$\vec{x}(t)=C_1(\mathrm{e}^t,0,0)^{\mathrm{T}}+C_2(t\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^t,0)^{\mathrm{T}}+C_3(0,0,\mathrm{e}^{2t})^{\mathrm{T}} \tag{4.39}$$

(2) 由 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$ 得：

$$\lambda_1=1+\mathrm{i},\lambda_2=1-\mathrm{i},\lambda_3=1 \tag{4.40}$$

$\lambda=1+\mathrm{i}$ 时，由 $(\mathbf{A}-(1+\mathrm{i})\mathbf{E})\vec{x}=\vec{0}$ 得：

$$\vec{r}_1=(1,-\mathrm{i},0)^{\mathrm{T}} \tag{4.41}$$

则有：

$$\vec{x}_1(t)=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}(1,-\mathrm{i},0)^{\mathrm{T}} \tag{4.42}$$

$$=\mathrm{e}^t(\cos t+\mathrm{i}\sin t)[(1,0,0)^{\mathrm{T}}+\mathrm{i}(0,-1,0)^{\mathrm{T}}] \tag{4.43}$$

$$=\mathrm{e}^t[(\cos t,\sin t,0)^{\mathrm{T}}+\mathrm{i}(\sin t,-\cos t,0)^{\mathrm{T}}] \tag{4.44}$$

那么我们可以立即用实部和虚部得到两个线性无关的解：

$$\vec{x'}_1 = \mathrm{e}^t(\cos t, \sin t, 0)^{\mathrm{T}} \tag{4.45}$$

$$\vec{x'}_2 = \mathrm{e}^t(\sin t, -\cos t, 0)^{\mathrm{T}} \tag{4.46}$$

$\lambda = 1$ 时，由 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$ 得：

$$\vec{r}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}} \tag{4.47}$$

故：

$$\vec{x}_3(t) = \mathrm{e}^t(0, 0, 1)^{\mathrm{T}} \tag{4.48}$$

故通解为：

$$\vec{x}(t) = C_1(\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\sin t, 0)^{\mathrm{T}} + C_2(\mathrm{e}^t\sin t, -\mathrm{e}^t\cos t, 0)^{\mathrm{T}} + C_3(0, 0, \mathrm{e}^t)^{\mathrm{T}} \tag{4.49}$$

常系数非线性微分方程组

此部分特别抽象而且公式推导过程复杂，但是，值得庆幸的是，基本上期末考试不会考 (除了 2021 年)。故笔者在此只将公式列出，供大家参考。
设 $\mathbf{X}(t)$ 为对应齐次方程的基解矩阵，且 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$，则非齐次方程的通解为：

$$\vec{x}(t) = \mathbf{X}(t)\vec{C} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t-\tau)\vec{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.50}$$

其中 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$ 的基解矩阵求法为：

1. 求出一个基解矩阵 $\mathbf{X}_1(t)$；

2. 求 $\mathbf{X}_1^{-1}(0)$；

3. $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{X}_1^{-1}(0)$。

钱院学辅公众号: qianyuanxuefu

钱院学辅信息站: https://qyxf.site

钱院学辅最新资料: https://qyxf.site/latest

珠峰学报专栏: https://qyxf.site/zhufeng/

钱院学辅 B 站账号: UID-504106059

群名称:科粉群3.0
群　号:1146432116

群名称:钱院学辅交流分享群
群　号:852768981

钱院学辅公众号