数试22级数学分析problem1-13答案参考

编写：钱院学辅资料组

题目来源:王立周老师的思考题

撰稿：数试2201李昆岳

审稿:数试2202李叙醇

志愿者：数试2201林逸言

Problem 1. (指数函数, 对数函数的增长率)

设 $\alpha > 0$. 证明下列不等式.

(1) $\ln x \leq x - 1, \qquad \forall x > 0,$

(2) $\ln x \leq C x^{\alpha}, \qquad \forall x > 0,$

(3) $\ln (x+1) \leq C_1 + C_2 x^{\alpha}, \qquad \forall x > 0,$

(4) $e^{x} \geq C x^{\alpha}, \qquad \forall x > 0,$

其中 C, C_1, C_2 是仅依赖于 α 的正常数, 在不同地方可能取不同的值.

问题2. 组合数的估计

(i) 设 $k_0 \in N^+$. 证明组合数

$$C_n^{k_0} \geq C n^{k_0}, \quad \forall\, n \geq 2k_0,$$

其中 $C = C(k_0) > 0$.

(ii) 利用 (i) 中的不等式证明极限

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0,$$

其中 $a \in R$, $a > 1$, $\alpha > 0$.

Problem 1

(1) 令 $f(x) = x-1-\ln x$
$f'(x) = 1-\frac{1}{x}$
令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 单增
$f(x) \geq f(1) = 0$
故 $x-1 \geq \ln x$ $\square$

(2) 对 $\alpha>0$ $\ln x = \frac{1}{\alpha}\ln x^{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \leq C x^{\alpha}$

(3) 对 $x<1$, $\ln(x+1)<\ln 2$

对 $x \geq 1$, $\ln(x+1) = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$
$\leq \ln 2 + C\cdot x^{\alpha}$. (由(2))

综上 (3) 得证 $\square$

(4) 上式 $\Leftrightarrow$ $x \geq \ln C + \alpha \ln x$
$\Leftrightarrow$ $\ln x \leq \frac{x}{\alpha} + C$

由(2) $\ln x \leq 2C_1\sqrt{x} \leq \frac{x}{\alpha} + \alpha\cdot C_1^2 \leq \frac{x}{\alpha} + C$ 得证 $\square$

Problem 2

(i) 由 $n \geq 2k_0$

$n(n-1)\cdots(n-k_0+1) \geq \frac{1}{2^{k_0}} n^{k_0}$

$C_n^{k_0} \geq \frac{1}{2^{k_0}\cdot k_0!} n^{k_0} \geq C n^{k_0}$

(ii) 令 $b=a-1>0$

$a^n = (b+1)^n \geq C_n^{\lfloor\alpha\rfloor+2} \cdot b^{\lfloor\alpha\rfloor+2}$ (当 $n \geq \lfloor\alpha\rfloor+2$)
$\geq n^{\lfloor\alpha\rfloor+2} \cdot C$

此时 $0<\frac{n^{\alpha}}{a^n} \leq \frac{1}{nC} \to 0$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^n} = 0$

problem3 林逸言提供

判断下面的命题是否正确.

命题：设 $a_n>0$，$b_n>0$，$b_{n+1}\neq b_n$，$n=1,2,\cdots$，如果

(1)：$a_n\to 0$，$b_n\to 0$；

(2)：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda$；

则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda$.

解：错误.我们考虑 $b_{2n}=\dfrac{1}{2n^2}$，$b_{2n-1}=\dfrac{1}{(2n-1)}$，$a_n=\dfrac{1}{n}$，则对 $2n+1$，

$$\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{b_{2n+1}-b_{2n}}=\frac{\dfrac{1}{(2n+1)}-\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{(2n+1)}-\dfrac{1}{2n^2}}=\frac{-1}{2n-\dfrac{2n+1}{n}}$$

，于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{2n+1}-a_{2n}}{b_{2n+1}-b_{2n}}=0$，

对 $2n+2$，

$$\frac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{b_{2n+2}-b_{2n+1}}=\frac{\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2(n+1)^2}-\dfrac{1}{2n+1}}=\frac{-1}{\dfrac{2n+1}{n+1}-(2n+2)}$$

，

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{b_{2n+2}-b_{2n+1}}=0$，综上 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=0$.

但 $\dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}=1$，$\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}=n$，矛盾！

注：此问题为Stolz定理的条件探讨.

设 a, b, p, q 为正实数，并且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

(i) 证明 Young 不等式

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

(ii) 设 $\varepsilon>0$. 证明插值不等式

$$ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q$$

Young 不等式等价于

$$1 \leq \frac{1}{p}\frac{a^{p-1}}{b} + \frac{1}{q}\frac{b^{q-1}}{a} = \frac{1}{p}\left(\frac{a^{1/q}}{b^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b^{1/p}}{a^{1/q}}\right)^q.$$

令

$$f(t) = \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q}t^{-q}, \quad t > 0.$$

则

$$f(1) = 1$$

$$f'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}.$$

当 $t \in (0,1)$ 时, $f'(t) < 0$, $f \downarrow$; 当 $t \in (1,+\infty)$ 时, $f'(t) > 0$, $f \nearrow$. 因此

$$\min f = f(1) = 1$$

所以

$$f(t) \geq 1, \ \forall t > 0.$$

这就证明了 Young 不等式.

由上面的证明,还可以得到,在 Young 不等式中 "=" 成立当且仅当 $a^p = b^q$.

Problem 4

(i) 由 $q>0$ 又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 得 $p>1$

令 a 为主元

$$f(a)=\frac{a^p}{p}-ab+\frac{b^q}{b}$$

则 $f'(a)=a^{p-1}-b$

$f(a)$ 在 $(0,b^{\frac{1}{p-1}})$ 单减

$(b^{\frac{1}{p-1}},+\infty)$ 单增

故 $f(a)\geqslant f(b^{\frac{1}{p-1}})$

又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow$

$(p-1)(q-1)=1$

故 $a=b^{\frac{1}{p-1}}=b^{q-1}$

故 $a=b^{\frac{1}{p-1}}$ 时

$$f(a)=\frac{a}{p}a^{p-1}+\frac{b}{q}b^{q-1}-ab$$

$$=(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)ab=0$$

故 $f(a)\geqslant 0$，得证 $\square$

(ii) 令 $g(a)=\varepsilon a^p-ab+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q$

$g'(a)=\varepsilon p\,a^{p-1}-b$

$g(a)\geqslant g((\frac{b}{\varepsilon p})^{\frac{1}{p-1}})$

当 $a^{p-1}=b/\varepsilon p$ 时 由 $(p-1)(q-1)=1$

故 $a=b^{q-1}/\varepsilon^{q-1}p^{q-1}$

No:

Date:

故 $\varepsilon^{-\frac{q}{p}} \cdot b^{q} = b \cdot b^{q-1} \cdot \varepsilon^{-\frac{q}{p}}$

$= \varepsilon^{q-1-\frac{q}{p}} \cdot p^{q-1} \cdot ab$

由 $p,q>1$ $p^{q-1}>1$

又 $q-1-\frac{q}{p} = q\frac{p-1}{p}-1 = \frac{q}{q-1}p-1$

$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\frac{1}{q-1} - 1 = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} - 1 = 0$

故 $\varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^{q} \geq ab$.

又 $\varepsilon \cdot a^{p} \geq 0$ 故 $f(a) \geq f\left(\left(\frac{b}{\varepsilon p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right) \geq 0$

原不等式得证

设 $E\subset\mathbb{R}^2$, $E\neq\phi$. 记

$$E_n=\{nx;\ x\in E\}\cap B_1,\qquad n=1,2,\cdots$$

这里

$$B_1=\{x\in\mathbb{R}^2;\ |x|<1\}$$

为单位圆. 记

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}S(E_n),$$

这里 $S(E_n)$ 表示 E_n 的面积.

(i) 设

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>x^2\}.$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n$. 请给出严格的计算或证明过程.

(ii) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$, f 为凸函数, 即

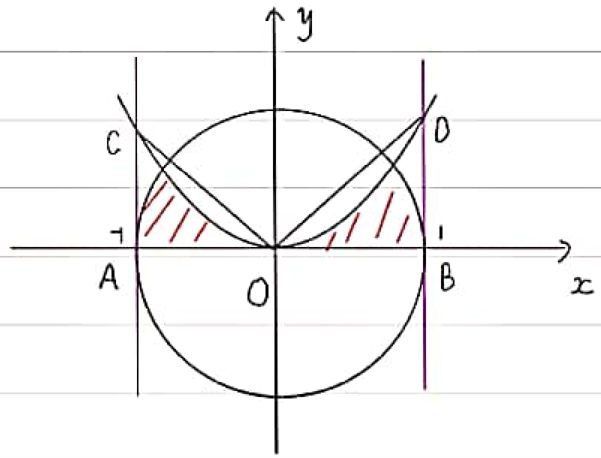
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\qquad\forall x,y\in\mathbb{R},\ 0\leq\lambda\leq1.$$

设

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>f(x)\}.$$

问 $\{\rho_n\}$ 是否一定收敛? 证明你的结论或举反例.

P5 (i)



由已知

$$E_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \ y > \frac{1}{n} x^2 \} \cap B_1 .$$

下面估计 E_n 的面积. 记

$$A = (-1, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (-1, \frac{1}{n}), \quad D = (1, \frac{1}{n})$$

则

$$0 \le \frac{\pi}{2} - S(E_n) \le S_{\triangle ACO} + S_{\triangle BDO} = \frac{1}{n},$$

因此

$$S(E_n) \to \frac{\pi}{2}.$$

Problem 5(2) （林逸言提供）

由于对下凸函数 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ $(a<b<c)$

故有 $\frac{f(\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} > \frac{f(\frac{x}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}$ $(x>0)$ 又同理有 $\frac{f(\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} > \frac{f(\frac{x}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}$ $(x<0)$

$E_n: \{(x,y)\in R^2;\ y>nf(\frac{x}{n})\}$

故我们有 $E_n \subseteq E_{n+1}$

那么 $0<\rho_n \leq \rho_{n+1} < \pi$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n$ 存在

设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 如果 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\ni$

$$f(x) \equiv C, \qquad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

称 f 局部为常数. 类似地可定义 f 局部为一次函数等等.

判断下列命题是否正确, 证明或举反例.

命题1. 如果 f 局部为常数, 则 $f \equiv C$;

命题2. 如果 f 局部为一次多项式, 则 f 为一次多项式;

命题3. 如果 f 局部为二次多项式, 则 f 为二次多项式.

Problem 6

题1 命题正确

证明：若不然，$\exists\, a_1<b_1$，$f(a_1)\neq f(b_1)$

则 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ 必与 $f(a_1)$，$f(b_1)$ 中的一个不同

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})\neq f(a_1)$ 令 $a_1=a_2$ $\frac{a_1+a_2}{2}=b_2$

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=f(a_1)$ 则 $f(\frac{a_1+b_1}{2})\neq f(b_1)$ 令 $\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$ $b_1=b_2$

对 a_i,b_i，我们用同样操作得到 a_{i+1},b_{i+1}

由此得到 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 有 $a_n<b_n$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$

$f(b_n)\neq f(a_n)$，且 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots$ $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n\ge\cdots$

由闭区间套定理，$\exists\,\xi\in R$ $\forall n\in N^+$

$\xi\in[a_n,b_n]$ 对 ξ $\exists\,\varepsilon>0$，$\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$

$f(x)=f(\xi)\Rightarrow\exists\, \underbrace{n\in N^+\ f(a_n)}_{a_n,b_n\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)}=f(\xi_1)=f(b_n)$

矛盾，得证 □

命题 2 正确，下证明：

对 $\forall x_0 \in R$，由条件，$\exists \varepsilon > 0$，$\ni f(x) = a_1 x + a_0$，

$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

则令 $g(x_0) = a_1$ 则 $\forall x_0 \in R$，$\exists \varepsilon > 0 \ni$

$$g(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

故 $g(x)$ 为局部常值函数，由命题 1 $g(x) \equiv C$

令 $g(x) = C_0$

Date:

令 $h(x)=f(x)-C_0x$

则 $h(x)$ 为局部为常数 由命题1 $h(x)\equiv C_1$

故 $f(x)\equiv C_0x+C_1$ 得证 $\square$

$;\varepsilon)$

命题 3 正确. 下证明

对 $\forall x\in R$, $\exists\varepsilon>0$, $\forall x\in U(x;\varepsilon)$

$f(x)$ 为二次多项式，令其二次项系数为 $g(x)$

则同理命题2. 若 $g(x)\equiv C$ 不成立

则 $\exists$ $a_n\le\xi\le b_n$ 使 $\forall$ $x\in[a_n,b_n]$

$f(x)=g(\xi)x^2+a_1x+b_1$

$\Rightarrow g(a)=g(\xi)=g(b)$ $g(x)\equiv C$ 令 $g(x)=C_0$

令 $h(x)=f(x)-C_0x^2$

9 $h(x)$ 为局部一次多项式，由命题 2

$h(x)\equiv C_1x+C_2$ $f(x)\equiv C_0x^2+C_1x+C_2$ 得证 $\square$

problem7不存在，缺失

设 X 为全集. 设 $A_n \subset X$, $n=1,2,\cdots$. 记

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k;$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

分别称 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n$ 为集合列 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限. 如果

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n,$$

称集合列 $\{A_n\}$ 有极限, 并定义集合列 $\{A_n\}$ 的极限

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n.$$

问题:

(1) 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n \supset \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n$.

(2) 设 $\{A_n\}$ 单调增, 即 $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in N^*$, 证明 $\{A_n\}$ 有极限, 并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$;
设 $\{A_n\}$ 单调减, 即 $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in N^*$, 证明 $\{A_n\}$ 有极限 并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

(3) 设 $B \subset X$. 定义 $\chi_B : X \to R$,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

称 χ_B 为 B 的特征函数. 设 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. 证明

$$\chi_A(x) = \lim_{n\to+\infty} \chi_{A_n}(x), \quad \forall x \in X.$$

No:

Date:

Problem 8

(1) $\forall i\in N^+, j\in N^+$ $\bigcap_{k=j}^{+\infty} A_k \subset A_{i+j} \subset \bigcup_{k=i}^{+\infty} A_k$

$\Rightarrow \bigcap_{k=j}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

(2) (i) 只需证 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ $(N\in N^+)$

(a) 若 $x\in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$，则由 $A_n\subset A_{n+1} \Rightarrow \exists N, \forall n\geq N\ \ x\in A_n$

此，$x\in A_{t+N} \Rightarrow x\in \bigcup_{k=t}^{+\infty} A_k \Rightarrow x\in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

又由 $\forall n\geq N$，$x\in A_n \Rightarrow x\in \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n$

$\Rightarrow x\in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_n$

$\Rightarrow x\in \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n \quad x\in \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

(b) 若 $x\notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$，$\forall i$，$x\notin A_i$ 由(a)(b)欲证者得证

显然 $x\notin \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$，$x\notin \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ 得证 □

(ii) 只需证 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$：

(a) 若 $x\in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$，则 $\forall i$，$x\in A_i$

显然 $x\in \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$，$x\in \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

(b) 若 $x\notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$，则由 $A_n\supset A_{n+1}$

$\Rightarrow \exists N, \forall n\geq N$，有 $x\notin A_n$

$x\notin \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k \Rightarrow x\notin \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

又 $\forall t$, $x \notin A_{t+N} \Rightarrow x \notin \bigcap_{k=t}^{+\infty} A_k$

$\Rightarrow x \in \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

由(a)(b)欲证者得证，命题得证

(3) i 若 $x \in A \Rightarrow x \in \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

$\Rightarrow \exists N \in N^+$, $x \in \bigcap_{k=N}^{+\infty} A_k$

$\Rightarrow \forall n \geq N$, $x \in A_n$ $\quad \chi_{A_n}(x) = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \chi_{A_n}(x) = 1 = \chi_A(x)$

(ii) 若 $x \notin A \Rightarrow x \notin \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$

$\Rightarrow \exists N \in N^+$, $x \notin \bigcup_{k=N}^{+\infty} A_k$

$\Rightarrow \forall n \geq N$, $x \notin A_n$

$\lim_{n\to+\infty} \chi_{A_n}(x) = 0 = \chi_A(x)$

综合(i)(ii)，命题得证

设 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(0)=0$. 记

$$G=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ \ x_2>f(x_1)\}.$$

G称为f的上图. 记

$$nG=\{nx;\ \ x\in G\},\quad n=1,2,\cdots.$$

(1) 设 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbb{R}$. 证明 $\{nG\}$ 有极限. 并求 $\{nG\}$ 的极限.

(2) 设 f 为凸函数.

(i) 证明 $\{nG\}$ 有极限.

(ii) 记 $G_0=\lim\limits_{n\to+\infty} nG$. 证明 G_0是某一个函数 $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的上图，并求 g 的表达式.

在分析中，上述方法称为blow-up. 利用这种方法，可以考查函数在一点的局部性质.

Problem 9

由题 $nG = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_2 > nf(\frac{x_1}{n})\}$

(1) $nf(\frac{x}{n}) = \frac{x^2}{n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^2}{n} = 0$ 故 $nf(\frac{x}{n}) \to 0$

故 $\lim\limits_{n \to +\infty} nG = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_2 > 0\}$，有极限

No:
Date:

(2) (i) 即证 $\forall x\in R$，$nf(\frac{x}{n})$有极限. 由凸函数性质

$nf(\frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n})+f(0) \geqslant (n+1)f(\frac{x}{n+1})$

令 $a_n = nf(\frac{x}{n})$ a_n 单调递减

$\Rightarrow \{a_n\}$ 有极限

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\{nG\} = \{(x_1,x_2)\in R^2;\ x_2 > \lim\limits_{n\to+\infty} nf(\frac{x_1}{n})\}$

得证 □

(ii) 由(i) G_0 为 $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} nf(\frac{x}{n})$ 的上图

更严谨证明:

(2) (i) 由于 $nf(\frac{x}{n}) \geqslant (n+1)f(\frac{x}{n+1})$

$\Rightarrow (n+1)G \supset nG$ 由 Problem 8 (2) 知

$\{nG\}$ 有极限

(ii) 由 Problem 8 (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} nG = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nG$

由于$\{nf(\frac{x}{n})\}$单调递减,极限存在(下面证其不为$-\infty$) $\lim\limits_{n\to+\infty} nG = \{(x_1,x_2)\in R^2;\ x_2 > \lim\limits_{n\to+\infty} nf(\frac{x_1}{n})\}$

为 $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} nf(\frac{x}{n})$ 的上图

下探究 $\lim\limits_{n\to+\infty} nf(\frac{x}{n})$，并证明其不为 $-\infty$:

定义1: 对于 $f(x): R\to R$，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ $\forall x\in(x_0, x_0+\delta)$

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 则记 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

No
Date

若 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ 则
$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

定义2:
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的值若存在 称 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数
记为 $f'(x_0+0)$

同理定义左导数 $f'(x_0-0)$

定理3:(Heine定理)

若 $f(x)\to A$, $x\to x_0$ (x_0^+,x_0^-)
则 $\forall x_n\to \underset{(x_0^+,x_0^-)}{x_0}$, $n\to+\infty$ 有 $f(x_n)\to A$, $n\to+\infty$

回到原题.

由函数凸性, 对 $0<y<x$
有 $\frac{1}{x}f(x)+(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})f(0)\geqslant\frac{1}{y}f(y)$
$*\left(\frac{1}{x}\cdot x+(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})\cdot 0=\frac{1}{y}\cdot y\right)$

所以 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增 且 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geqslant\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0}$

由单调有界定理 存在 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in R$

由定理3 $\underset{x>0\text{时}}{\underbrace{\quad}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}nf(\frac{x}{n})=x\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{x}f(\frac{x}{n})=xf'(0+0)$

扫描全能王 创建

同理，$x<0$时

$$\lim_{n\to+\infty} nf\left(\frac{x}{n}\right) = xf'(0-0)$$

故 $g(x)=\begin{cases} xf'(0+0), & x>0 \\ 0, & x=0. \\ xf'(0-0), & x<0 \end{cases}$

设 $K_n \subset \mathbb{R}$ 为非空紧集，$n=1,2,\cdots$，$\{K_n\}$ 单调减，$K=\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$. 证明：$K \neq \phi$.

Remark. 这是闭区间套定理的一个推广.

Problem 10.

若不然，$\forall x_0\in\mathbb{R}$，$\exists N_{x_0}$, $\forall n\geq N_{x_0}$, $x_0\notin K_n$

下证明引理：$\exists\,\varepsilon_{x_0}>0$，$\forall n\geq N_{x_0}$ $(x_0-\varepsilon_{x_0}, x_0+\varepsilon_{x_0})\cap K_n=\phi$

证明：若不然，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\, n\geq N_{x_0}$ $K_n\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\neq\phi$

由 $K_{n+1}\subset K_n \Rightarrow (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap K_{N_{x_0}}\neq\phi$

又 $x_0\notin K_{N_{x_0}}$（由反证所假设）

下构造开集

$I_i=(-\infty, x_0-\frac{1}{i})$ $J_i=(x_0+\frac{1}{i}, +\infty)$

则 $K_{N_{x_0}}\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} J_i\right)$

由 $K_{N_{x_0}}$ 为紧集，$\exists\, t_1<t_2<\cdots<t_l$

$s_1<s_2<\cdots<s_m$

No

Date

有 $K_{N_{x_0}} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{l} I_{t_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} J_{s_i}\right)$

令 $p=\max\{t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_m\}$

则 $\left(x_0-\frac{1}{p+1}, x_0+\frac{1}{p+1}\right) \cap K_{N_{x_0}} = \emptyset$

矛盾

故引理得证

由引理

由于 $K_1 \subseteq \bigcup_{x_0 \in R} (x_0-\varepsilon_{x_0}, x_0+\varepsilon_{x_0})$

$\exists\, x_1<x_2<\dots<x_u$ 于 $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{u} (x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i})$

令 $N=\max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_u}\}$

则对 K_{N+1}，有 $K_{N+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{u} (x_i-\varepsilon_{x_i}, x_i+\varepsilon_{x_i})\right) = \emptyset$

又 $K_{N+1} \subseteq K_1$ 故 $K_{N+1} = \emptyset$ 矛盾，故得证

证明：R 不能分解成两个非空互不相交的开集的并，也就是说，如果 $A, B \subset R$ 为开集，

$A \cap B = \phi$，$A \cup B = R$，则必有 $A = \phi$ 或 $B = \phi$.

Remark. 这是一个拓扑学中的定理，在许多书上都有证明. 希望你能给出一个独立的证明.

Problem 11（闭区间套定理版）

若不然，$\exists x\in A$，$y\in B \Rightarrow x\neq y$ 不妨 $x<y$

令 $x=a_1$，$y=b_1$，对 $\frac{a_1+b_1}{2}$，由 $A\cup B\in R$，$A\cap B=\phi$

故 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 为 A，B 中一个集合的元素

若 $\frac{a_1+b_1}{2}\in A$，令 $\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$，$b_1=b_2$

Date:

否则令 $\frac{a_1+b_1}{2}=b_2$, $a_1=a_2$

同理得到闭区间套 $\{[a_i, b_i]\}$

有 $\forall i$, $a_i \in A$, $\forall i$, $b_i \in B$.

$\exists \xi$, $\forall i$, $a_i \leq \xi \leq b_i$

不妨令 $\xi \in A$

则由 X 为开集 $\exists \varepsilon>0$ $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subseteq A$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$ $\exists n$, $b_n-a_n<\varepsilon$.

$\Rightarrow [a_n, b_n] \subseteq (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$

$\Rightarrow b_n \in$ 矛盾，故得证

(老师说可用完备性公理证明，暂未想到，

欢迎补充)

证明：存在 $a_n \in \mathbb{R}$，$n=1,2,\cdots$，使得 $\forall x \in \mathbb{R}$，x 是 $\{a_n\}$ 的某个子列的极限.

Remark：这个结论的证明，可以借助于集合的势理论，也可以不用集合的势理论.

No:
Date:

Problem 12

① 下构造数列 $\{a_{0n}\}$ 为

$0, 0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 0, 0.01, 0.02, \cdots, 0.99, 0, 0.001, \cdots,$
$0.999, 0, 0.0001, \cdots, 0.9999, \cdots$

则任一 $[0,1)$ 间的有限小数在数列中出现无穷多次

又任一 $x\in[0,1)$

$\lfloor x\rfloor, \frac{\lfloor 10x\rfloor}{10}, \cdots, \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}, \cdots$

构成一个各项为 $[0,1)$ 间有限小数的数列

其极限为 x，由上所述，其必为 $\{a_{0n}\}$ 的子列

② 令 $a_{in} = a_{0n}+i$

则对数表

$a_{01}\quad a_{02}\quad a_{03}\quad \cdots$
$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad \cdots$
$a_{-11}\quad a_{-12}\quad a_{-13}\quad \cdots$
$a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}\quad \cdots$
a_{-21}
$a_{31}\quad \ddots$
$\vdots$

No:
Date:

令其第 i 行 j 列数为 b_{ij}，构造数列

$b_{11}\quad b_{12}\quad b_{21}\quad b_{13}\quad b_{22}\quad b_{31}\quad b_{14}\quad b_{23}\quad b_{32}\quad b_{41}\quad \cdots$

此数列包含数表中任一项，又 $\forall x$，令 $t=\lfloor x\rfloor$，

存在 $\{a_{tn}\}$ 的子列极限为 t

故上述数列 $(b_{11}, b_{12}, \cdots)$ 满足题意 得证 $\square$

定义1. 设 $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 设 $x_0\in A$. 如果 $\exists\ \varepsilon, L\in\mathbb{R}$, $\varepsilon, L>0$, $\ni$

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|, \quad \forall\ x,y\in A\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),$$

称 f 在 x_0 点局部 Lipschitz 连续.

定义2. 设 $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 如果 $\exists\ L\in\mathbb{R}$, $L>0$, $\ni$

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|, \quad \forall\ x,y\in A,$$

称 f Lipschitz 连续.

设 $f: K\to\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{R}$ 为紧集. 设

(i) f 有界;

(ii) f 局部 Lipschitz 连续.

证明: f Lipschitz 连续.

证明: 由已知, $\forall x \in K$, $\exists\, \varepsilon_x, L_x > 0$, $\ni$

$$|f(y)-f(z)| \leq L_x |y-z|, \quad \forall\, y, z \in (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \cap A.$$

记

$$I_x = (x-\varepsilon_x/3,\ x+\varepsilon_x/3),\ x \in A.$$

则 $I_x, x \in A$ 覆盖 K. 因此, $\exists\, x_i \in A$, $i=1\sim N$, $\ni$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_{x_i}.$$

记

$$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{x_i}/3;\ i=1\sim N\},$$

$$L_1 = \max\{L_{x_i};\ i=1\sim N\}.$$

设 $x, y \in A$. 设 $|x-y| \leq \varepsilon_0$. $\exists\, x_i$, $\ni x \in I_{x_i}$. 则

$$|y-x_i| \leq |y-x| + |x-x_i| \leq \frac{2}{3}\varepsilon_x < \varepsilon_x,$$

因此,

$$|f(x)-f(y)| \leq L_1 |x-y|.$$

设 $|x-y| \geq \varepsilon_0$. 设 $|f| \leq M$. 记 $L_2 = \frac{2M}{\varepsilon_0}$. 则

$$|f(x)-f(y)| \leq 2M \leq L_2 |x-y|.$$

记 $L = \max\{L_1, L_2\}$. 则

$$|f(x)-f(y)| \leq L |x-y|.$$

因此, f Lipschitz 连续. □

Problem 13 (此方法略繁)

① $\forall x_0,\ \exists\ \varepsilon_{x_0}, L_{x_0}, \ni\ |f(x)-f(y)| \le L_{x_0}|x-y|\ \ \forall\ x,y \in (x_0-\varepsilon_{x_0},\ x_0+\varepsilon_{x_0})$

则由于 $K \subset \bigcup\limits_{x_0\in K} (x_0-\varepsilon_{x_0},\ x_0+\varepsilon_{x_0})$

我们有 $\exists\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i-\varepsilon_{x_i},\ x_i+\varepsilon_{x_i})$$

No:

Date:

对开区间 T_1, T_2

② 引理：若 $\forall x \neq y \in K \cap T_1$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L_1$$

$\forall x \neq y \in K \cap T_2$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L_2$$

又 $\exists x_0 \in T_1 \cap T_2$, $x_0 \in K$

则 $\forall x \neq y \in K \cap (T_1 \cup T_2)$

$\exists L$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L$$

证：只需证 $x \in T_1, x \notin T_2$

$y \in T_2, y \notin T_1$ 情况

此时

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)-f(y)|$$
$$\leq L_1|x-x_0| + L_2|y-x_0|$$

由 T_1, T_2 为开区间 $x-x_0, y-x_0$ 异号

上式 $\leq (L_1+L_2)|y-x|$ 得证

③ 由引理，

$\exists a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_m < b_m \quad (m \geq 1)$

有 $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i)$ f 在 $K \cap (a_i, b_i)$ Lipschitz 连续

(利普希茨)

No:

Date:

若 $\exists j$，$b_j = a_{j+1}$ 下证 f 在 $K\cap(a_j, b_{j+1})$ Lipschitz 连续：

证：由 Problem 10 中引理，由于 $a_{j+1}\notin K$，$\exists\, \varepsilon>0$

$(a_{j+1}-\varepsilon, a_{j+1}+\varepsilon)\cap K=\phi$

$\Rightarrow \forall x, y\in K$，$x\in(a_j, b_j)$ $y\in(a_{j+1}, b_{j+1})$

有 $y-x>2\varepsilon$ 令 $|f(t)|<M$ 则有

$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}<\frac{M}{\varepsilon}$ 又 (a_j, b_j)，(a_{j+1}, b_{j+1}) 内 f Lipschitz 连续，由此得证，

④ 由③，不妨 $\forall i$，$a_{i+1}>b_i$

令 $\eta=\min\limits_{2\le i\le n}\{a_i-b_{i-1}\}$ 令 $\forall x, y\in K$，$x, y\in(a_i, b_i)$

$|f(x)-f(y)|\le L_i|x-y|$

则对 $\forall x, y\in K$

$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le\max\left\{L_1, L_2, \ldots, L_n, \frac{2M}{\eta}\right\}$

故原命题得证