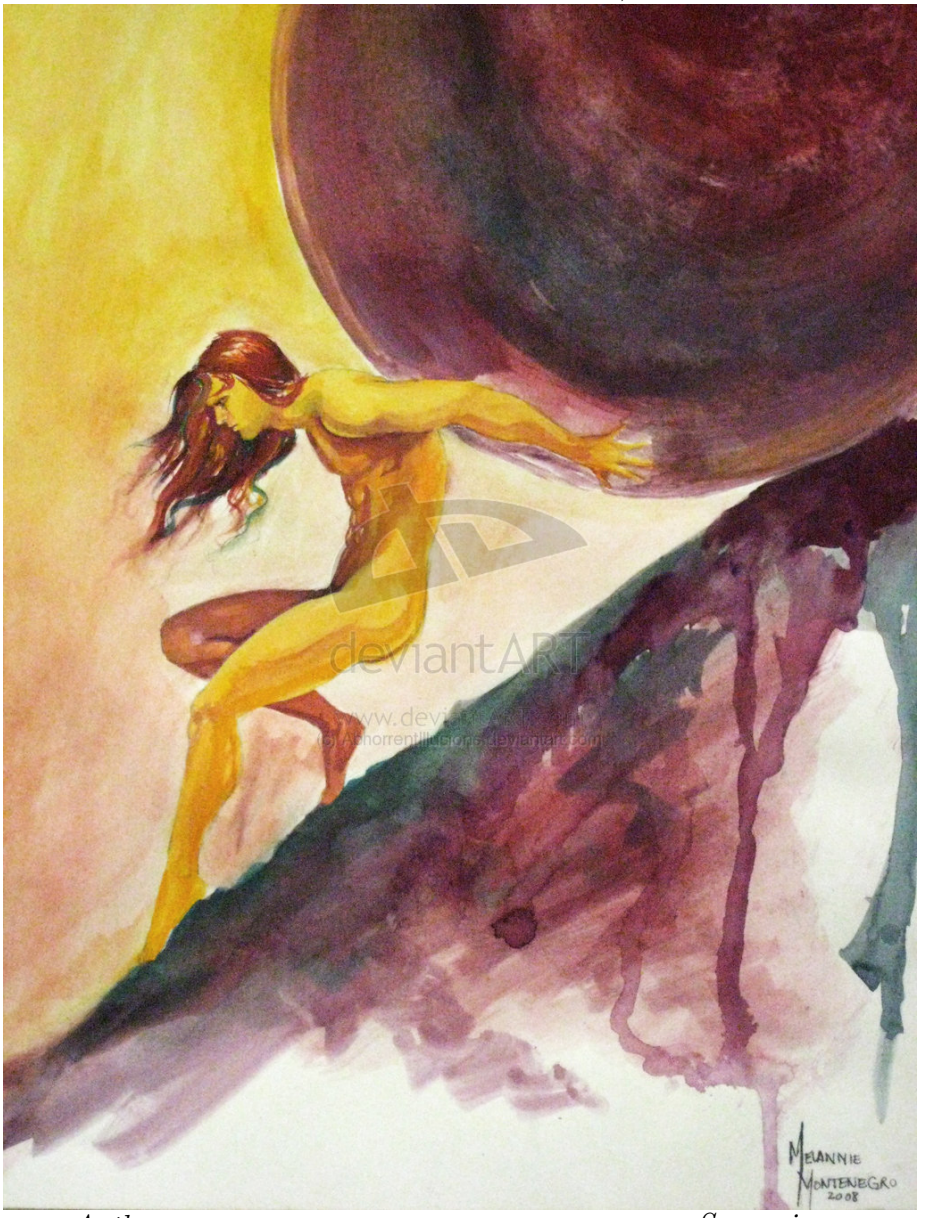
黎曼几何 2021

Lecture Notes of MATH544307, XJTU SMS



Author:
Lyduck

Supervisor:
立周 王

Last TEXed in April 30, 2021

Contents

0.1 写在前面 3
0.2 记号表 3
Chapter 1 预备知识 **4**
1.1 流形的定义 4
1.2 切空间 5
1.3 向量场 5
1.4 全微分 6
Chapter 2 黎曼度量 **8**
2.1 黎曼度量 8
2.2 联络 11
2.3 Levi-Civita 联络 13
Chapter 3 测地线 **16**
3.1 测地线 16
3.2 指数映照 17
3.3 和度量的相容性 23
Chapter 4 曲率 **25**
4.1 张量 25
4.2 曲率 27
4.3 截面曲率 31
4.4 张量 (续) 33
4.5 Ricci 曲率, 标量曲率 35
4.6 协变微分 37
Chapter 5 子流形几何学 **40**
5.1 子流形 40
5.2 正交分解 41
5.3 二次型 43

0.1 写在前面

此处的序言适用于网络发布版.

这是一份黎曼几何 (课程号:MATH544307) 的课程笔记, 开设于 2021 年春季学期, 授课老师是王立周老师. 课程的内容大致覆盖了 [W89] 的前三章, 名义上使用的教材是 [dC92], 课后习题也出自该书.

王立周老师的授课强调几何直观, 但是由于笔者并不会使用 Tikz 包, 导致无法还原王老师神韵之万一. 但笔者尽可能地做到了还原课堂上的文字内容, 并尝试记录他思想性的文字.

当然, 作为一份未经额外整理且可能并不会有时间整理的课堂笔记, 多有疏漏大概也是在所难免, 但笔者尽可能在每节课课后都确保过自己的笔记的正确性, 姑且算是做了一点微小的贡献. 如果有人不幸看到并使用了这份笔记, 且不幸地发现了 typo 或是任何事实性错误, 请联系笔者的校园邮箱 seiran@stu.xjtu.edu.cn, 虽然收到笔者的回复也是一件小概率事件, 但是如果发现有问题还是请发到邮箱来吧, 万一笔者回了呢.

这份笔记的模版来自于同来自应数 91 的 Yukon Chen[1]同学, 感谢他在 “因为想脱单但是找不到女朋友而成为大家的笑柄” 一事带来的贡献, 这成为了笔者每天的欢乐来源之一, 没有他为笔者带来的欢乐和模版, 这份笔记的完成将无法成为可能.

感谢王立周老师, 李田老师, 陈红斌老师, 数试 72 的梁浩然学长, 信计 81 的王龙扬学长和其他师长, 同学, 感谢诸位与笔者的探讨和对笔者的指导, 感谢诸位愿意提携笔者这种低水平人士, 数学后进生.

最后致谢数试 82 的卞照轩学长, 如果不是在半年之前在梁浩然学长主持的讨论班上有幸听到您的几何化狭义相对论, 笔者可能现在还在沉迷追图算同调[2], 靠形式演算获得虚无缥缈而毫无价值的快感而不去思考几何——乃至数学究竟应该是什么[3].

这份序言已经写得很长很长了, 最后不嫌噜苏地以 [W89] 序言引用的话作为结尾吧——

——*切勿要求胜利, 只应要求有一往无前的勇气. 因为从坚忍不拔的奋斗中, 你将为自己带来荣誉, 但更重要的, 你将为全人类带来光荣.*

Lyduck[4]

初稿定于 April 30, 2021.

0.2 记号表

$f : A \to B$, 允许 $Dom\, f = \varnothing$. 对单射定义逆, 其逆的定义域是值域.

复合映射 $g \circ f$ 的定义域 $Dom\, g \circ f = f^{-1}(Dom\, g)$.

如未经特殊声明, 本文中皆是光滑对象.

注意本课程使用的教材是 [dC92]. 这意味着很多事情, 请一定当心.

[1]译者注: 即陈昱坤.

[2]指依赖于符号演算来逃避直观和本质.

[3]照这么说, 同样应当感谢影响笔者数学观点最大的 Vladimir Arnol'd.

[4]即应数 91 刘益达.

1 预备知识

1.1 流形的定义

Definition 1 (流形) 对于一个集合 M, 如果存在一个 M 的覆盖 $\mathscr{M}$ 满足对于每个 $M_i \in \mathscr{M}$ 都存在一个映射 $\varphi_i : \mathbb{R}^n \supseteq U \to M_i$ 是一个微分同胚, 其中 U 在 $\mathbb{R}^n$ 中开, 且对于任两个 i, j, 有 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的微分同胚, 则称 M 是一个微分流形.

定义流形上的拓扑, 则定义流形中的开集由坐标映射诱导 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 即定义让坐标映射成为连续映射的最小的拓扑. 假设提到的流形都是连通,T_2,A_2 的.

定义流形之间的连续函数 $f \in C(M, N)$, 光滑性通过把坐标映射拉回 $\mathbb{R}^n$ 中定义. 通过继承光滑结构和拓扑结构定义开子流形.

Example 1.1 (流形的例子)

1. $\mathbb{R}^n$;
2. 函数的图像;

Lemma 5.9 (Graphs as Submanifolds). *If $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ is smooth, then the graph of F is an embedded n-dimensional submanifold of $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Proof. Define a map $\varphi\colon U \times \mathbb{R}^k \to U \times \mathbb{R}^k$ by

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

It is clearly smooth, and in fact it is a diffeomorphism because its inverse can be written explicitly:

$$\varphi^{-1}(u, v) = (u, v + F(u)).$$

Because $\varphi(\Gamma(F))$ is the slice $\{(u, v) : v = 0\}$ of $U \times \mathbb{R}^k$, this shows that $\Gamma(F)$ is an embedded submanifold. □

Figure 1.1: 引自 [Lee02].

3. 有限维线性空间;

4. S^n;
5. B^n;
6. $\mathbb{R}P^n$;

Remark 1.1 $\mathbb{R}^n$,S^n,B^n 是三种重要的流形 (空间形式).

极大微分结构 (等价类).

1.2 切空间

Definition 1 (曲线) 令 $\gamma : (a, b) \to M$, 若 γ 是 C^∞ 类映射, 则称 γ 是一条流形 M 上的曲线.

曲线的坐标表示依赖于 (a, b) 的转换映射 $id_{\mathbb{R}}$ 和 M 的转换映射 φ, 即

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\varphi^{-1}} M.$$

为了定义曲线的长度, 需要一个线性泛函. 考虑常见的函数芽对切向量的定义, 即先定义余切空间, 考虑函数的等价类, 然后考虑光滑的那些 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p$, 定义 $\dot{\gamma}(0)$ 满足

$$\langle \gamma(0), f \rangle := \frac{d}{dt} f \circ \gamma \mid_{t=0} .$$

则切空间平凡的定义为那些切向量的等价类在某一点构成的线性空间. 需要注意的是由于不同点的切空间中的切向量是泛函, 定义域不一样. 可以通过欧氏空间的切空间 $T\mathbb{R}^n$ 的一个基写出流形上切空间的一个基, 一般记作 $\{\partial_i\}$. 现在给出一些切向量作用于函数的性质:

1. $D_v f = \langle v, \alpha f + \beta g \rangle = \alpha D_v f + \beta D_v g$,
2. $D_{(\alpha v + \beta w)} f = \alpha D_v f + \beta D_w f$,
3. $D_v(fg) = g D_v f + f D_v g$.

1.3 向量场

Definition 1 (向量场) 一个 M 上向量场 X 是切丛 TM 的光滑截面, 其满足 $X(p) \in TM_p$. 记所有光滑向量场的集合为 $\mathscr{V}(M)$.

Remark 1.2 切丛的光滑结构 $\tilde{\varphi}$ 如此法建立:

$$y^i \partial_i(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x, y).$$

Example 1.2 对于一个坐标映射 $\varphi : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \Omega \subseteq M$ 而言, 其在 $T\Omega$ 上自然定义了一个向量场:

$$\partial_i(p) = \frac{d}{dt} \mid_{t=0} \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_i).$$

其有坐标表示

$$(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \partial_i \circ \varphi)(x) = (x, e_i).$$

在一个流形的坐标邻域内, 可以将一个向量场用基向量场展开, 即对于 $\forall X \in \mathscr{V}(M)$, 存在 C^∞ 类函数 X^i, 满足

$$X = X^i \partial_i.$$

$\mathscr{V}(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 上的模,$X(f) : M \to \mathbb{R}$ 满足 $df(X)(p) = X(f)(p) = D_{X(p)}f$. 故向量场 X 可以看作 $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, 是 $C^\infty(M)$ 模上的一阶线性微分算子, 即将 X 和 D_X 等同.

可以总结出三个向量场的基本性质, 即对函数线性, 对向量场线性, 满足函数乘积的求导法则. 需要注意到,Lie 括号

$$[X, Y] := XY - YX$$

也是一个向量场 (一阶线性微分算子).

给出一些 Lie 括号的性质如下:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$,
2. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$,
3. (Jacobi Id)
$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

1.4 全微分

Definition 1 对于 $f \in \mathbb{C}^\infty(M, N)$, 定义 $df \mid_p : TM_p \to T_{f(p)}N$, 令 $v = \dot{\gamma}(0)$, 则

$$df \mid_p (v) = \frac{d}{dt} \mid_{t=0} f \circ \gamma.$$

注意到其满足 $d(f \circ g) \mid_p = df \mid_{g(p)} \circ dg \mid_p$.

Definition 2 ($\mathscr{F}$-线性) 若 $F : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^\infty(M)$, 满足:

1. $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$, 对 $\forall X, Y \in \mathscr{V}(M)$ 成立,
2. $F(fX) = fF(X)$, 对 $\forall X \in \mathscr{V}(M), f \in C^\infty(M)$ 成立,

则称 F 是 $\mathscr{F}$-线性的.

Lemma 1.1 若 $F:\mathscr{V}(M)\to C^\infty(M)$ 是 $\mathscr{F}$-线性的,$p\in M$, 若对于 $X,Y\in\mathscr{V}(M)$ 有 $X(p)=Y(p)$, 则有 $F(X)(p)=F(Y)(p)$.

这个引理说明,$\mathscr{F}$-线性的映射是逐点定义的.

Remark 1.3 (截断函数) 取定一个从 $\mathbb{R}^n\supseteq U\to M$ 的参数化 φ, 满足 $\varphi(U)=\Omega,\varphi(0)=p$, 则存在一个函数 $\xi\in C^\infty(M)$, 满足 $supp\,\xi\subseteq\Omega$ 紧, 且在 p 点附近取值为 1,$\partial\Omega$ 附近取值为 0.

2 黎曼度量

2.1 黎曼度量

为了给拓扑流形赋予度量结构, 考虑逐点在切空间中定义内积结构. 则对于两个 $X, Y \in \mathscr{V}(M)$, 定义她们的内积为 $\langle X, Y\rangle(p) := \langle X(p), Y(p)\rangle$, 但是这一定义不能保证所得函数的光滑性.

Definition 1 *定义 $B : \mathscr{V}^2(M) \to C^\infty(M)$, 满足:*

1. $B(fX + gY, Z) = fB(X, Z) + gB(Y, Z)$,
2. $B(X, fY + gZ) = fB(X, Y) + gB(X, Z)$,

其中 $X, Y, Z \in \mathscr{V}(M), f, g \in C^\infty(M)$. 称 B 是一个双线性形式.

Lemma 2.1 *对于双线性形式 B, 若 $X(p) = \tilde{X}(p), Y(p) = \tilde{Y}(p)$, 则 $B(X, Y)(p) = B(\tilde{X}, \tilde{Y})(p)$.*

则为了逐点定义内积, 对于双线性形式 B,$p \in M, u, v \in TM_p$, 定义 $B_p(u, v) = B(X, Y)(p)$, 其中 $X, Y \in \mathscr{V}(M)$ 且 $X(p) = u, Y(p) = v$.

对于局部向量场, 同样可以依照此法定义:$X, Y \in \mathscr{V}(\Omega), \Omega \subseteq M$ 是开的, 定义 $B_\Omega(X, Y)(p) = B(X(p), Y(p))$, 则性质遗传.

现在给出其局部表示: 取 B 为一个双线性形式, 取定一个局部卡, 令 $B_{ij} = B(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$, 则由于双线性性, 有 $B(X, Y) = X^i Y^j B_{ij}$.

若 $B(u, u) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $u \equiv 0$, 称 B 为正定的; 若 $B(u, v) = B(v, u)$, 则称 B 是对称的.

Definition 2 (黎曼度量) *若 g 是一个 M 上的对称正定的双线性形式, 则称 g 是一个黎曼度量, 称二元组 (M, g) 是黎曼流形. 记度量系数为 $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.*

Example 2.1

1. R^n,
2. 有限维 *Hilbert* 空间 H,
3. 装备了诱导度量的 S^n.

定义曲线为 $\gamma:(a,b)\to M$ 是一个 C^∞ 类映射, 线段定义为光滑曲线在闭区间上的限制. 曲线的长度定义为

$$L(\gamma)=\int_a^b|\dot\gamma|dt.$$

则可以光速诱导距离结构

$$d(p,q):=\inf L(\gamma),$$

其中 γ 是连接 p,q 两点的所有分段光滑曲线, 需要注意的是, 需要验证其满足度量结构的条件.

Definition 3 (黎曼等距) 对于两个黎曼流形 M,N, 若 $f:M\to N$ 是一个微分同胚且逐点保持内积, 即对于 $u,v\in TM_p$ 有 $\langle df_p(u),df_p(v)\rangle=\langle u,v\rangle$, 则称 f 是一个等距同构.

如果两个黎曼流形之间存在一个黎曼等距, 则称这两个黎曼流形是黎曼等距的.

Example 2.2 (局部黎曼等距) $f:M\to N$ 是光滑的, 若对于 $\forall p\in M,\exists U\subseteq M,p\in U$ 是其邻域,$\exists V\subseteq N,f(p)\in N$ 是其邻域, 且 $f:U\to V$ 是黎曼等距, 则称 f 是一个局部黎曼等距.

Lemma 2.2 f 是一个局部黎曼等距, 当且仅当对于 $u,v\in TM_p$ 有 $\langle df_p(u),df_p(v)\rangle=\langle u,v\rangle$, 其中 p 取遍整个流形 M.

Example 2.3 (S^1 的黎曼复叠) 对于 $f:\mathbb{R}\to S^1,f(\theta)\to(\cos\theta,\sin\theta)$, 其是一个局部黎曼等距, 称这个复叠映射为黎曼复叠.

现在讨论黎曼等距的性质. 对于 $f:M\to N$ 是一个局部黎曼等距, 有:

1. 对于分段光滑的 $\gamma:[a,b]\to M$, 满足 $L(\gamma)=L(f\circ\gamma)$[1],
2. 对于 $p,q\in M$, 有 $d(f(p),f(q))\le d(p,q)$,

现在在流形上定义积分, 令 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个微分同胚, 且 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(y)dy\xlongequal{y=\varphi(x)}\int_{\mathbb{R}^n}f(D\varphi(x))|\det(\varphi(x)|dx,$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi(x))=\frac{d}{dt}\mid_t\varphi(x+te_i)=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x),$$

且

$$D\varphi=(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}),$$

[1] 考虑

$$\int_a^b|\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)|dt=\int_a^b|df_{\gamma(t)}\dot\gamma(t)|dt=\int_a^b|\dot\gamma(t)|dt=L(\gamma).$$

$$|\det D\varphi| = \sqrt{\det(D\varphi, (D\varphi)^T)} = \sqrt{\det(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})},$$

故有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \xlongequal{y=\varphi(x)} \int_{\mathbb{R}^n} f(D\varphi(x))\sqrt{\det(g_{ij}(\varphi(x))}dx,$$

也将 $\sqrt{\det(g_{ij}(\varphi(x))}$ 记作 $\sqrt{g}$. 现在考虑流形上的积分, 令 $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, $f \in C_c(M), supp\ f \subset\subset \varphi(U)$ 是一个坐标邻域,$\varphi = \varphi(x)$, 基向量场记作 $\frac{\partial}{\partial x^i}$, 度量系数记作 g_{ij}, 定义

$$I(f) = \int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det(g_{ij}(\varphi(x)))}dx.$$

现在需要证明积分与坐标系选取无关, 则再取一个参数化, 令 $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, $f \in C_c(M), supp\ f \subset\subset \psi(V)$ 是一个坐标邻域,$\psi = \psi(x)$, 基向量场记作 $\frac{\partial}{\partial y^i}$, 度量系数记作 $\widetilde{g_{ij}}$, 定义

$$\tilde{I}(f) = \int_V f(\psi(x))\sqrt{\det(\widetilde{g_{ij}}(\psi(y)))}dy.$$

令

$$y = F(x) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(x),$$
$$x = F^{-1}(y) = (\varphi^{-1} \circ \psi)(y).$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_k D_i F_k^{-1}(y)\frac{\partial}{\partial x^k}(\psi(y)),$$

$$\widetilde{g_{ij}}(\psi(y)) = g(\frac{\partial}{\partial y^i}(\psi(y)), \frac{\partial}{\partial y^j}(\psi(y))) = \sum_{k,m} D_i F_k^{-1}(y) D_j F_m^{-1}(y) g_{km}(\psi(y)),$$

观察 RHS 的形式, 注意到 $(\widetilde{g_{ij}}) = (DF^{-1})^T(g_{ij})DF^{-1}$, 则

$$\sqrt{\det(\widetilde{g_{ij}}(\psi(y)))} = |\det DF^{-1}(y)|\sqrt{\det(g_{ij}(\psi(x)))}.$$

则根据变量替换公式, 有

$$\tilde{I}(f) \xlongequal{y=(\psi^{-1}\circ\varphi)(x):=F(x)} \int_U f(\varphi(x))|\det DF^{-1}(y)|\sqrt{\det(g_{ij}(\psi(x)))}|\det DF^{-1}(y)|dx = I(f).$$

当 $supp\ f$ 不能被一个参数化所覆盖时, 任取一个坐标覆盖 Ω_i 使得每个 $\Omega_i \subset\subset$ 某一个给定的 U, 则存在单位分拆函数 ξ_i, 定义积分为

$$I(f) := \sum_i I(\xi_i f).$$

可以验证这一定义是良定义的.

注意到,I 定义了一个 $C_c(M) \to \mathbb{R}$ 上的线性非负泛函, 则由 Riesz 表现定理知, 存在一个 M 上的正则 Borel 测度 V, 积分的定义至此结束.

2.2 联络

考虑到流形的光滑结构并不蕴含着对向量场求导的能力, 故需要公理化地定义出所谓联络.

Definition 1 (仿射联络) 对于光滑流形 M, 定义 $D : \mathscr{V}^2(M) \to \mathscr{V}(M), D(X,Y) =: D_X Y$, 其满足:

1. $D_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha D_X Y + \beta D_X Z$,*(linearity)*,
2. $D_{fX+gY} Z = f D_X Y + g D_X Z$,*($\mathscr{F}$-linearity)*,
3. $D_X(fY) = (Xf)Y + f D_X Y$.*(Leibnitz)*.

则称 D 为 M 上的**仿射联络**. 称 $D_X Y$ 为 Y 沿 X 的协变导数.

在后文中均视 D 为一个取定的仿射联络.

Lemma 2.3 若 $Y, \widetilde{Y} \in \mathscr{V}(M)$, 且在 p 点的某些邻域内满足 $Y = \widetilde{Y}$, 则对于每个 $X \in \mathscr{V}(M)$, 有 $(D_X Y)(p) = (D_X \widetilde{Y})(p)$.

Proof. 取 p 的一个邻域 Ω 满足 $Y = \widetilde{Y}$, 则令 $Z := Y - \widetilde{Y} = 0$ 定义在 Ω 中, 则只需证明 $(D_X Z)(p) = 0$.

令 $\xi \in C_c^\infty(M)$ 是截断函数, 即其满足 $supp\, \xi \subset\subset \Omega$, 且在 p 附近有 $\xi \equiv 1$. 注意到 $\xi Z \equiv 0$, 则有

$$D_X(\xi Z) = (X\xi)Z + \xi D_X Z,$$

即在 p 点附近有 $\xi D_X Z = 0$, 明所欲证. □

Lemma 2.4 若 $X, \widetilde{X} \in \mathscr{V}(M), X(p) = \widetilde{X}(p)$, 则 $(D_X Y)(p) = (D_{\widetilde{X}} Y)(p)$.

Proof. 考虑到其 $\mathscr{F}$-线性性, 原命题立得成立. □

现在考察向量场的延拓, 若 $X \in \mathscr{V}(\Omega), p \in M, v \in TM_p$, 则只需令

$$D_v X(p) = D_V \widetilde{X}(p).$$

其中,$\widetilde{X} \in \mathscr{V}(M)$ 且与 X 在 Ω 中相等,$V \in \mathscr{V}(M)$, 满足 $V(p) = v$.

现在利用这一点定义局部联络, 令 $X, Y \in \mathscr{V}(\Omega)$, 逐点定义 $D_X Y(p) := D_{X(p)} Y(p)$ 如上, 则可以定义 Ω 中的联络.

Definition 2 (联络系数) 令

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

其中 Γ_{ij}^k 是 C^∞ 类函数, 被称为联络系数或 *Christoffel* 记号.

注意到由于 $\mathscr{F}$-线性性和线性性, 联络系数唯一决定了一个联络. 展开计算, 得:

$$\begin{aligned} D_X Y &= X^i D_i Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \sum_k (X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Lemma 2.5 取定 $v \in TM_p$, 则 D_v 被 $\gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ 唯一决定.

Definition 3 对于光滑的 $\gamma : (a,b) \to M$ 和 $X : (a,b) \to TM$, 若 $X(t) = T_{\gamma(t)}M$, 则称 X 是 γ 上的向量场.

Example 2.4 对于 $X \in \mathscr{V}(M)$, 令 $Y = X \circ \gamma$, 则 Y 可以看作一个曲线 γ 上的向量场.*resp.*, 考虑曲线 γ 上的向量场 Y, 其可以延拓到整个流形.

Remark 2.1 注意到 Y 延拓的条件: 在局部其切向量不为 0 向量, 则其在局部上是一个嵌入子流形, 所以可以做局部上的延拓.

Theorem 1 对于流形 M 上的仿射联络 D 和一条光滑曲线 $\gamma : (a,b) \to M$, 则存在一个算子 $\partial_t : \mathscr{V}(\gamma) \to \mathscr{V}(\gamma)$, 其对于 $X, Y \in \mathscr{V}(\gamma)$ 满足:

1. $\partial_t(\alpha X + \beta Y) = \alpha \partial_t X + \beta \partial_t Y$,
2. $\partial_t f X = \dot{f} X + f \partial_t X$,
3. 如果 X 有一个局部扩张 $\widetilde{X} \in \mathscr{V}(\Omega)$ 满足 $X(t) = \widetilde{X}(\gamma(t))$, 则

$$D_{\dot{\gamma}(t)} \widetilde{X}(\gamma(t)) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Example 2.5 对于 $\gamma(t) \equiv p, v \in TM_p, f \in C^\infty(\mathbb{R}), X(t) = f(t)v$, 则经过计算得

$$\partial_t X = \dot{f}(t)v + f\partial_t(v) = \dot{f}(t)v.$$

注意到根据定义, 这里的 $f\partial_t(v) = D_{\dot{\gamma}(t)}V = D_0 V = 0$. 其中 $V \in \mathscr{V}(M), V(p) = v$.

现在计算该算子的坐标表示, 令 $X(t) = X^i \partial_i \in \mathscr{V}(\gamma), \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &:= \frac{dX(t)}{dt} \\ &= D_{\dot{\gamma}(t)} \widetilde{X}(\gamma(t)) \\ &= \dot{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \dot{\gamma}^i D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \dot{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

在这里取 $X = \dot{\gamma}(0)$, 得到

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma = \ddot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

事实上, 上式的形式与测地线方程相同. 注意到当左端项等于 0 且联络是 Levi-Civita 联络时时恰满足测地条件.

2.3 Levi-Civita 联络

> “… 也表明联络是太多了! 因此如果不进一步限制, 一般联络的研究便没多大意思. 数学中, 人们必须选出有趣的对象做深入研究. 作为第一次挑选, 人们能借助黎曼度量挑出一个颇有意思的联络, 这在下一段要细讲的.”
>
> 伍鸿熙, 《黎曼几何初步》[2]

在这一小节, 我们将定义一个合理的仿射联络. 其关于黎曼度量具有存在唯一性. 我们宁可提前说出她的名字而并非害怕失去悬念:Levi-Civita 联络. 具体来说, 考虑仿射联络和黎曼度量的相容性.

Definition 1 (Levi-Civita 联络) *对黎曼流形 (M, g) 而言, 存在唯一指定联络 D 满足: 对于任意的 $X, Y, Z \in \mathscr{V}(M)$ 而言, 满足:*

1. $X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$ *(保度量),*
2. $D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$ *(无挠).*

Remark 2.2 注意到, 对于保度量的联络 D, 有

$$\partial_t \langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \partial_t X, Y\rangle + \langle X, \partial_t Y\rangle.$$

对于无挠的联络, 其自然有 $D_i \frac{\partial}{\partial x^j} = D_j \frac{\partial}{\partial x^i}$, 即 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proof. 现在来算 Levi-Civita 联络的分量形式, 这将证明其唯一性. 注意到度量系数 $g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}\partial_k g_{ij} &= \langle D_{\partial_k}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle \partial_i, D_{\partial_k}\partial_j\rangle \\ &= \Gamma_{ki}^l g_{jl} + \Gamma_{kj}^l g_{il}.\end{aligned}$$

[2] 即 [W89].

根据轮换对称性, 马上可以写出其他两组

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl},$$
$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{jk}^l g_{il}.$$

使用古典微分几何中经典的那一套相加减后指标轮换的把戏, 得到

$$2g_{lk}\Gamma_{ij}^l = \partial_i g_{ik} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij},$$

即是

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk}(\partial_i g_{il} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

其中, 这里的 g^{lk} 满足 $g^{jk}g_{ij} = \delta_k^i$. 至此便证明了若 Levi-Civita 联络存在, 则其被度量系数唯一决定.

而对于存在性的论证, 不妨取定局部坐标系, 令 $X = X^i\partial_i, Y = Y^j\partial_j$, 则定义 Levi-Civita 联络的局部表达式为

$$D_X Y = X^i(\partial_i Y^j + Y^j\Gamma_{il}^j)\partial_j.$$

则可以验证其是不依赖于坐标卡的选取, 良定义的, 也可以验证其确实满足题目给定的条件.[3]故存在性得证. □

Example 2.6 定义光滑曲面 $f = f(s,t)$ 为

$$f : (a,b) \times (c,d) \to M,$$

固定其中一个参数 s, 让 t 光滑变化, 则得到一个曲线族, 记作 $f_s(t)$.[4]同样可以固定 t, 让 s 光滑变化, 得到另一个曲线族, 记作 $f_t(s)$.

定义曲面上的向量场. 令 $X : (a,b) \times (c,d) \to TM$, 若 $X(s,t) \in TM_{f(s,t)}$, 则称 $X \in \mathscr{V}(f)$.

每个曲面上有两个自然的切向量场. 分别是 $\frac{\partial f}{\partial t} := \frac{df_s}{dt}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial s} := \frac{df_t}{dt}$. 注意到这两个向量都可以看作<u>两族</u> 曲线上的向量场. 注意到这些向量场都可以继续沿着<u>两族</u>曲线求导, 则得到四个向量场. 分别是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 s}.$$

我们知道沿曲线 γ 的向量有沿曲线的导数

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i X^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

取定一个坐标映射 φ, 则令 $f^j := (\varphi^{-1} \circ f)^j$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f^j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

[3]当然, 懒惰至极的笔者自然没做此工作.
[4]称为曲线的变分.

注意到 $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ 无非是 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 沿着 $f_t(s)$ 的导数，得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = (\frac{\partial^2 f^k}{\partial s \partial t} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^i}{\partial s} \frac{\partial f^j}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

同样得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} = (\frac{\partial^2 f^k}{\partial t \partial s} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^i}{\partial t} \frac{\partial f^j}{\partial s}) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

比对各项，得知

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}.$$

即在曲面上的二阶混合导数可以交换顺序.

需要注意的是，求三阶导一般不能交换顺序，除非该平面是平坦的.

3 测地线

3.1 测地线

考虑一条光滑曲线 $\gamma = \gamma(t)$, 对其做平移的再参数化得到 $\alpha(t) = \gamma(t + t_0)$, 则考察速度和加速度的变动关系. 断言应当有关系

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\gamma}(t + t_0),$$
$$\ddot{\alpha}(t) = \ddot{\gamma}(t + t_0).$$

考察伸缩反射变换 $\alpha(t) = \gamma(kt)$, 其中 $k \in \mathbb{R}$, 则断言

$$\dot{\alpha}(t) = k\dot{\gamma}(kt),$$
$$\ddot{\alpha}(t) = k^2\ddot{\gamma}(kt).$$

Definition 1 (平行) *称向量场 X 沿着 γ 平行, 若 $dX/dt \equiv 0$.*

注意到向量场平行的条件给定了一个一阶线性系统, 则根据 ode 初值问题解的存在唯一性, 有结论如下: 给定一个曲线段 $\gamma|_{[0,1]}$, 则对于 $TM\gamma(0)$ 中每个向量 v, 都有唯一的沿着 γ 平行的向量场.

现在考虑测地方程

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma = 0,$$

注意到在 $\mathbb{R}^n$ 中, 其有通解 $\gamma(t) = at + b$, 考虑流形上的解.

首先其有特解 $\gamma \equiv p, p = const$. 称其为平凡解.

Definition 2 (测地线) *若曲线 γ 满足测地线方程, 且 $\gamma \not\equiv const.$, 则称 γ 是一条测地线.*

Example 3.1 *1. 欧氏空间中的测地线*

考虑在 $\mathbb{R}^n$ 中,$\ddot{\gamma} = 0$, 则 $\gamma(t) = at + b$, 其轨迹是直线.

2. 球面上的测地线

不妨取一个赤道上的大圆

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$

为了区分, 欧氏空间中的联络记作 D,S^2 上的联络记作 ∇. 则

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma},$$

给两个 S^2 上的光滑向量场 $X, Y \in \mathscr{V}(S^2)$, 可以将其延拓到整个欧氏空间, 记其延拓为 $\tilde{X}, \tilde{Y}$. 断言[1]

$$\nabla_X Y = (D_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_{S^2})^T.$$

这里的 T 表示 $proj : T\mathbb{R}^3 \to TS^2$, 是一个沿着球面切方向的正交投影.

Remark 3.1 注意到如上的讨论可以推广到任何嵌入子流形中.

根据历史的进程, 先把 $\dot{\gamma}(t)$ 延拓到 S^2 中, 记作 X[2], 再把 X 延拓到 $\mathbb{R}^3$ 中, 记作 $\tilde{X}$. 则

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}X = \nabla_X X(\gamma(t)) = (D_{\tilde{X}}\tilde{X}\mid_{S^2})^T(\gamma(t)),$$

计算 RHS, 则

$$\begin{aligned} RHS &= (D_{\tilde{(X)}}\tilde{X}(\gamma(t)))^T \\ &= (D_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{X})^T \\ &= (\frac{d}{dt}\dot{\gamma})^T \\ &= (-\cos t, -\sin t, 0)^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.2 指数映照

记号说明: 记 $\pi : TM \to M$ 是切丛到底流形的投影.

为了解测地线方程, 给定初值条件

$$\begin{cases} \ddot{\gamma} = 0, \\ \gamma(0) = \pi v, \dot{\gamma}(0) = v. \end{cases}$$

注意到测地线方程在 local chart 下是一个非线性二阶 ode, 故其解 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是局部存在唯一的. 且局部存在唯一的解可以延拓成为一个极大的解

$$\gamma : (a_v, b_v) \to M,$$

且 $-\infty \le a_v < 0 < b_v \le +\infty$. 我们现在断言, 流形作为度量空间是完备的, 则其极大测地线的定义域是 $\mathbb{R}$.(Hopf-Rinow)

[1]注意到 LHS 相当于在 $\mathbb{R}^3$ 中沿球面的切方向求导 (这一点保证了良定义); 且可以证明 RHS 是一个 Levi-Civita 联络. 故根据 Levi-Civita 联络的唯一性, 得到左右相等.

[2]这一延拓的合理性来自 γ 是幺模的, 则其是非退化的, 故其在局部是一个一维嵌入子流形.

需要注意的是,γ 需要光滑依赖于初值. 为了考察初值问题, 记 $\Gamma(v,t)$ 是初值为 v 时测地线方程的解. 注意到 $\Gamma : Dom\,T \subseteq TM \times \mathbb{R} \to M$, 考虑到解对参数的依赖是连续的, 则 $Dom\,\Gamma$ 是开集. 注意到

$$Dom\,\Gamma = \bigcup_{v \in TM} \{v\} \times (a_v, b_v).$$

现在给出几条测地线的性质:

1. $|\frac{d}{dt}\Gamma(v,t)| \equiv |v|$.

   Proof. 记 $\gamma \in \Gamma$. 计算

   $$\frac{d}{dt}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

   故 $|\dot{\gamma}| \equiv C = |v|$. 计算弧长,

   $$s = \int_0^t |\dot{\gamma}| = |v|t.$$

   故对于测地线, 弧长正比于参数 t. □

2. $\Gamma(v,kt) = \Gamma(kv,t)$.(homogeneous of geodesic)

   Proof. 分别记

   $$\begin{aligned} \alpha(t) &= \Gamma(v,t), \\ \beta(t) &= \Gamma(kv,t), \\ \gamma(t) &= \Gamma(v,kt). \end{aligned}$$

   为了证明原命题, 只需证明 β 和 γ 相等, 故只需证明 γ 是测地线且 $\dot{\gamma}(0) = \dot{\beta}(0)$. 计算

   $$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) = k\dot{\alpha}(kt), \dot{\gamma}(0) = k\dot{\alpha}(0) = kv = \dot{\beta}(0), \\ \ddot{\gamma}(t) = k^2\ddot{\alpha}(kt) = 0, \end{aligned}$$

   故明所欲证. □

   在给出第三条性质之前, 先定义所谓指数映射:

Definition 1 (指数映射) 定义

$$E := \{v \in TM : 1 \in (a_v, b_v)\}.$$

其中 (a_v, b_v) 是以 v 为初速度的测地线的极大存在区间. 根据解对初值的连续依赖性, 则知道 E 是一个开集.

现在定义指数映射 $\exp : E \to M, v \mapsto \Gamma(v,1)$.

3. 指数映照 $\exp(tv)$ 是测地线 $\Gamma(t,v)$.

   Proof. 直接根据齐性, 计算

$$\exp(tv) = \Gamma(tv,1) = \Gamma(v,t).$$

□

   故 t 的取值范围是 (a_v, b_v). 定义 $E_p := \{v \in TM_p : 1 \in (a_v, b_v)$, 注意到其是一个星型邻域[3], 则可以定义在 p 点的指数映照

$$\exp_p : E_p \to M, \exp_p(v) = \exp(v),$$

   其中 $v \in TM_p$. 则 $\exp_p(tv)$ 表示过 p 点且初值条件为 $\dot{\gamma}(0) = v$ 的测地线.

现在研究指数映照. 注意到 $\exp_p : E_p \subseteq TM_p \to M$, 断言零向量 $\vec{O}_p \in E_p$. 则指数映照的定义域是零向量的一个邻域. 断言

Theorem 1 $d(\exp_p)_{\vec{O}} = id_{TM_p}$. 即指数映照在 $\vec{O}$ 是一个恒等映射.

为了看清此事, 一个最不含混的办法是如下:

注意到 $\exp_p(\vec{O}_p) = p$, 由于 TM_p 的切空间与 TM_p 自然同构, 故考察一条 TM_p 中的曲线 $\xi(t)$ 使得 $\dot{\xi}(t) = v \in TM_p$, 取 $\xi(t) := tv$ 满足条件, 则计算得到

$$d(\exp_p)_{\vec{O}}(v) = \frac{d}{dt} |_{t=0} (\exp_p)(tv) = v,$$

这说明指数映射在局部是微分同胚, 其将切空间中的直线映到流形中的测地线.

Definition 2 (测地球) 若 $\exp_p : B_R \subseteq TM_p \to \exp_p(B_R)$ 是一个微分同胚, 则称 $B_R(P) := \exp_p(B_R)$ 是一个测地球.

同样可以定义流形上的测地球面, 径向测地线定义为连接 TM_p 原点和测地球面上某一点的线段的指数映照像.

径向测地线 $\exp_p(tv)$ 和球面的交点的切向量是

$$\frac{d}{dt} |_{t=1} \exp_p(tv) = d(\exp_p)_v(v),$$

且测地球面的切向量是球面的切向量的指数映照像, 不妨记作 $d(\exp_p)_v(w)$, 其中 w 是球面原本的切向量.

Theorem 2 (Gauβ 引理) 测地球面和径向测地线正交, 即

$$\langle d(\exp_p)v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = 0.$$

其中 $v \in Dom\,(\exp_p), w \in TM_p$, 且 $\langle v, w\rangle = 0$.

[3] $v \in E_p \implies sv \in E_p$,for $s \in (0,1)$ 成立. 注意到若 $1 \in (a_v, b_v)$, 则 $1 \in (a_{sv}, b_{sv}) = \frac{1}{s}(a_v, b_v)$,

Proof. 在球面上取 $\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_{|v|}$, 其满足初值条件 $\beta(0)=v,\dot{\beta}(0)=w$, 根据 ode 解唯一存在依赖于初值的性质, 知其是良定义的.

取足够小的 ε, 令 $\beta\in Dom\,(\exp_p)$, 则 β 的指数映射像中的每一点可以连 p 点得到一族径向测地线, 记

$$f(s,t)=\exp_p(t\beta(s)).$$

其中 $t\in[0,1]$ 连续变化. 注意到

$$f(0,t)=\exp_p(tv),\ \frac{\partial f}{\partial t}(0,1)=d(\exp_p)_v(v),$$
$$f(s,1)=\exp_p(\beta(s)),\ \frac{\partial f}{\partial s}(0,1)=d(\exp_p)_v(w).$$

实际上, 要证明的命题是

$$\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle(0,1)=0.$$

将这一证明分成两个部分:

1. 证明
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle=0,$$
即证明这个内积和 t 无关,
2. 然后证明
$$\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle(0,0)=0.$$

先证明第 2 条, 直接求导

$$\frac{\partial f}{\partial s}=t(d\exp_p)_{t\beta(s)}(\beta(s)),$$

则显然有当 $t=0$ 时 $LHS=0$, 故原命题得证.

再证明第 1 条, 注意到固定每个 s,f 都是测地线, 则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0,$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle&=\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\rangle\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\frac{\partial f}{\partial t}|^2,\end{aligned}$$

注意到测地线的速率是常数, 故考虑在原点处的速率是 $|\beta(0)|=const.$, 得到 $LHS=0$. 明所欲证. □

Remark 3.2 实际上构造的双参数测地线族 $f(s,t)$ 被称为测地变分,*Jacobi* 场衡量的就是这样一族测地线互相靠近或散开的程度.

通过做一个径向投影, 可以简单地得到推论

Corollary 3.1 对于 $v \in Dom\,(\exp_p), w \in TM_p$, 有

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

即指数映照沿着径向测地线保内积.

为了将“两点之间, 直线最短”的命题推广到流形上, 得到的恰当的命题是“测地球的半径 (径向测地线) 最短”.

Theorem 3 令 $B(p) \subseteq M$ 是一个测地球,$v \in B_R \subseteq TM_p$ 且 $v \neq 0$,$\gamma(t) = \exp_p(tv)$, 其中 t 在 $[0,1]$ 中取值.

令 $\alpha : [0,1] \to M$ 是一根分段光滑的曲线, 且满足 $\alpha(0) = p, \alpha(1) = \exp_p(v)$, 则:

1. $L(\alpha) \geq L(\gamma)$,
2. 若 $L(\alpha) = L(\gamma)$ 且 α 是弧长参数的, 则 $\alpha = \gamma$.

Proof. 为了证明该定理, 假设:

1. $\alpha(t) \in B_R(p)$,
2. $\alpha(t) \neq p$, 对于 $0 < t \leq 1$ 成立.

可以说明, 当证明了弱定理后去掉这两个假设, 强定理仍然成立.

现在对切向量进行分解, 令 $\beta(t) = (\exp_p)^{-1}(\alpha(t))$, 其切向量径向分量为

$$v(t) = \langle \dot{\beta}(t), \hat{\beta}(t)\rangle \hat{\beta}(t),$$

其中 $\hat{\beta}(t) = \beta(t)/\|\beta(t)\|$, 切向分量为 $\tau(t) = \dot{\beta}(t) - v(t)$.

注意到 $\alpha(t) = \exp_p(\beta(t))$, 则

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^1 |\dot{\alpha}(t)| dt \\ &= \int_0^1 |d(\exp_p)\,|_{\beta(t)}\,(\dot{\beta}(t))| dt \\ &= \int_0^1 |d(\exp_p)\,|_{\beta(t)}\,(v(t)) + d(\exp_p)\,|_{\beta(t)}\,(\tau(t))| dt, \end{aligned}$$

根据 Gauβ 引理, 知 v 和 τ 的指数映照像正交, 则有

$$\begin{aligned} LHS &\geq \int_0^1 |d(\exp_p)\,|_{\beta(t)}\,(v(t))| dt \\ &= \int_0^1 |v(t)| dt, \end{aligned}$$

注意到

$$|v(t)|dt = |\frac{\langle\dot{\beta},\beta\rangle}{|\beta|}| = |\frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\beta|^2}{|\beta|}| = |\frac{d}{dt}|\beta||,$$

则有简单的估计

$$LHS = \int_0^1 |\frac{d}{dt}|\beta||dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt}|\beta|dt = |v| = L(\gamma).$$

故定理的第一部分得到证明.

现在证明定理的第二部分, 为了满足 $L(\alpha) = L(\gamma)$ 的条件, 之前计算中所有出现的 $\geq$ 都应该是 $=$. 注意到证明待证命题等价于证明 $\beta(t) = tv$.

为了让第一个 $\geq$ 号的等号成立, 得到

$$d(\exp_p)\ |_{\beta(t)}\ (\tau(t)) = 0,$$

即 $\dot{\beta}(t) = v(t)$,β 没有切向分量. 得到

$$\int_0^1 |v(t)|dt = \int_0^1 |\dot{\beta}(t)|dt,$$

即 $L(\beta) = |v|$, 考虑到在切空间中, 其切实意味着 $\beta([0,1])$ 的像是 v.

断言 $|\dot{\alpha}(t)| = |\dot{\beta}(t)|$, 这是因为

$$|\dot{\alpha}(t)| = |d(\exp_p)\ |_{\beta(t)}\ (\dot{\beta}(t))|,$$

而 $\dot{\beta}$ 此时和 β 平行, 故得到该命题成立, 这得到 $|\dot{\beta}(t)| = const.$, 联合 $L(\beta) = |v|$ 这一事实, 注意到总时间 $t = 1$, 得到 $|\dot{\beta}| = |v|$, 则断言 $\beta(t) = tv$ 作为一个欧氏空间的结论是成立的[4]. 故原定理最终得到证明. □

Theorem 4 (全测地邻域) *取定 $p \in M$, 则存在一个 $W \subseteq M$ 是 p 的开邻域, 和一个常数 r, 使得以 W 中任一点为球心都可以做测地球 $B_r(p) \supseteq W$[5].*

Proof. 取定一个 $\mathscr{U} \in TM$ 满足一些粗糙的条件, 并定义映射

$$F : \mathscr{U} \to M \times M, \quad (x, v) \mapsto (x, \exp_x v),$$

[4]为了证明这一结论, 不妨令 $\beta(t) = f(t)v$, 则 $|\dot{\beta}(t)| = |\dot{f}(t)||v| = |v|$, 故得到 $|\dot{f}(t)| = 1, f = \pm 1$. 有

$$\int_0^1 \dot{\beta}(t)dt = \beta(1) - \beta(0) = v,$$

$$\int_0^1 \dot{f}(t)dt = 1.$$

得到 $\dot{f} \equiv 1$, 即 $f(t) = t$, 原命题得证.

[5]详细证明 x 见 [dC92] 的 Theorem 3.7.

注意到 $F(p,0)=(p,p)$, 且 $d\exp_p|_0=id$, 得到

$$dF|_{(p,0)}=\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

故知存在 $W\in M\times M$ 和 $\mathscr{U}\in TM$ 之间的局部微分同胚, 然后取 TM_p 中足够长的径向线段 v, 令 $\{q\}\times B(0,|v|)$ 盖住 W 即可. □

Corollary 3.2 *是因为令 $\gamma:(a,b)\to M$ 是一条测地线, 令 $t_0\in(a,b)$, 则 $\exists\varepsilon>0$, 使得 $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}$ 是最短的.*

Proof. 取一个 $\gamma(t_0)$ 的全测地邻域 W, 如有必要则 shrink ε 使得 $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}$, 记 $p:=\gamma(t_0-\varepsilon)$, 则存在一个 r, 使得 $W\subseteq B_r(p)$, 且满足 $\gamma(t)\in B_r(p)$, 其中 $t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$.

现在试图证明,γ 和从 $\gamma(t_0-\varepsilon)$ 到 $\gamma(t_0+\varepsilon)$ 的测地线重合. 不妨假设 $|\dot\gamma|=1$, 再参数化 γ 得到

$$\alpha(t)=\gamma(t+t_0-\varepsilon),0\le t\le 2\varepsilon,$$

取 $\dot\alpha(0)=v$, 其满足 $|v|=1$, 再以 v 为初速度作一条径向测地线

$$\beta(t)=\exp_p(tv),0\le t<r,$$

如有必要,shrink $\varepsilon\le r/4$, 则由 ode 解的存在唯一性得到 $\alpha(t)=\beta(t)$ 对于每个 $0\le t\le 2\varepsilon$ 成立, 得到 γ 也是一条径向测地线. □

Corollary 3.3 *$\gamma:[a,b]\to M$ 分段光滑且是最短的曲线, 如果 $|\dot\gamma|\equiv const.$, 则 γ 是一条测地线.*

Proof. 对于 $\gamma(t_0)$, 取其的一个全测地邻域 W, 则存在 $r>0$, 使得对于 W 中每一点 p 都有 $W\subseteq B_r(p)$.

取 $0\le\varepsilon,\gamma(t)\in W,t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$, 记 $p=\gamma(t_0)$, 使得 $B_r(p)\supseteq W$.

注意到对于 $q\in W\bigcap\gamma$, 连接 p,q 的径向测地线和 γ 重合: 这是因为如果 γ 不是径向测地线, 则可以取一条新曲线, 其在 p,q 段外处处与 γ 重合, 但在 p,q 段取连接这二者的径向测地线. 则这条新曲线的总长度小于 γ, 与题设矛盾. 故得到在所有光滑部分,γ 都是径向测地线.

为了处理端点处, 例如做一个 $\gamma(a)$ 的全测地邻域, 且得到满足要求的 $r\in\mathbb{R}$, 再取跟 $\gamma(a)$ 足够接近的 $s\in\gamma$, 同样取从 s 到 $\gamma(a)$ 的径向测地线并知其与 γ 重合, 并做反向延长, 再在 $\gamma(a)$ 上求二阶导.

总结上述证明得到,$\ddot\gamma(t)=0$ 对于 $\forall t\in[a,b]$ 成立. □

现在, 关于“测地线是最短曲线”的一系列结论已经得到了完全的证明.

3.3 和度量的相容性

注意到流形本身是一个度量空间 (回忆起其度量定义为 $d(a,b)=\inf\{\gamma:\gamma(0)=a,\gamma(1)=b\}$), 其中 γ 是分段光滑映射. 则考虑作为度量空间的度量球

$$\mathscr{B}_r(p):=\{q\in M:d(p,q)<r\},$$

回忆起流形上自然度量是 $d(x,y)=\inf_\gamma\{L(\gamma)\}$, 现在需要考察测地球 $B_r(p)$ 和度量球是否等价. 事实上这一命题是成立的.

Theorem 1 流形上的度量球和测地球等价, 即

$$\mathscr{B}_r(p)\equiv B_r(p).$$

Proof. 为了证明这两个集合相等, 只需要证明二者互相包含.

证明 $B_r(p)\subseteq\mathscr{B}_r(p)$:

取 $v\in B_r(p)$, 则其满足 $v<r$, 且令 $\exp_p(v)=x$, 则 $\exp_p(tv)$ 是一条径向测地线, 其中 $t\in[0,1]$,$|v|<r$, 则 $d(x,p)\le|v|<r$. 故包含号得证.

证明 $\mathscr{B}_r(p)\subseteq B_r(p)$:

如 $\alpha\in\mathscr{B}_r(p)$ 但 $\alpha\notin B_r(p)$, 则 α 必然穿出测地闭球的球面 $\partial\overline{B}_{r-\varepsilon}(p)$, 故 $L(\alpha)>r-\varepsilon$, 令 $\varepsilon\to0$, 则 $L(\alpha)\ge r$, 导出矛盾. □

4 曲率

4.1 张量

对于 $F:\mathscr{V}(M)\to C^\infty(M)$ 或 $\mathscr{V}(M)$, 对于所有 $f,g\in C^\infty(M), X,Y\in\mathscr{V}(M)$ 满足:

$$F(fX+gY)=fF(X)+gF(Y),$$

则称 f 是一个 $\mathscr{F}$-线性的算子. 根据之前的讨论,F 是逐点定义的.

Definition 1 (张量) 对于 $T:\mathscr{V}^k(M)\to C^\infty(M)$, 若 T 对于其每个自变量都是 $\mathscr{F}$-线性的, 称 T 是一个 k 阶协变张量,

现在考虑张量的逐点定义, 取 $p\in M$, 对于 $v_i\in TM_p$, 将每个 v_i 延拓成向量场 X_i, 则

$$T(v_1,\cdots,v_k):=T(X_1,\cdots,X_k)(p).$$

证明略, 这样实际上定义了一个切空间中的 k-线性算子即 $T:(TM_p)^k\to\mathbb{R}$.

现在考虑张量的局部定义, 令 $\Omega\subseteq M$ 是开子流形, 对于 $X_i\in\mathscr{V}(\Omega)$, 定义

$$T(X_1,\cdots,X_k)(p):=T(X_1(p),\cdots,T_k(p)),$$

可以验证 T 也是一个 Ω 上的 k 阶协变张量.

不妨考虑一个局部坐标系 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, 在该局部坐标系上 T 是一个 k 阶协变张量. 令 T 作用于基向量场, 得到一个光滑函数

$$T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})=:T_{i_1,\cdots,i_k},$$

称 RHS 为张量的分量, 注意到在 n 维流形中 k 阶张量有 n^k 个分量. 注意到一个张量被气分量完全确定, 为了证明此事只需要将向量场用基向量场展开, 有

$$T(X_1,\cdots,X_k)=\prod_{j=1}^k X_j^{i_1}T_{i_1,\cdots,i_k}.$$

现在来解释协变的含义: 不妨再取一组基向量场 $\frac{\partial}{\partial y^i}$, 有

$$T(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{j_k}})=:\tilde{T}_{j_1,\cdots,j_k},$$

方便起见称 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 为旧坐标系,$\frac{\partial}{\partial y^j}$ 为新坐标系, 新旧坐标系的坐标变换为 $\frac{\partial}{\partial y^j} = a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}$.

将坐标转换带回张量分量, 有:

$$\tilde{T}_{j_1,\cdots,j_k} = \prod_l a^{i_l}_{j_l} T_{i_1,i_2,\cdots,i_k}.$$

观察 RHS, 注意到 T 的每个下标的变换规律和基向量场变换规律一致, 故称 T 为 k 阶协变张量.

Example 4.1 *1.* 对于 $V \in \mathscr{V}(M)$, 定义 $T : \mathscr{V} \to C^\infty(M), X \mapsto \langle X, V\rangle$, 则 T 是一个 1 阶协变张量. 现在计算其张量分量, 令 $V = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 则

$$T_i = V^j g_{ij},$$

注意到 T 和 V 在 (M, g) 中自然等同, 不妨记

$$V_i = V^j g_{ij}.$$

称指标在下的分量为协变分量, 指标在上的分量为逆变分量.

2. 注意到度量 $g = g(X, Y)$ 自然是一个 2 阶协变张量.

3. 如果 $T \to \mathscr{V}^k(M) \to \mathscr{V}(M)$ 是一个 $\mathscr{F}$-线性的算子, 则称 T 是一个 $(k, 1)$ 型 *(*k 阶协变,1 阶反变*)* 张量. 现在考虑其坐标表示

$$T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = T^{i_{k+1}}_{i_1,\cdots,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}},$$

注意到其是一个 $k+1$ 阶张量, 现在考虑其坐标变换, 有

$$\tilde{T}(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^{j_k}}) = \tilde{T}^{j_{k+1}}_{j_1,\cdots,j_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_{k+1}}},$$

和坐标变换

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$\frac{\partial}{\partial x^i} = b^j_i \frac{\partial}{\partial y^j},$$

其中 a 和 b 互逆, 带回得到

$$\tilde{T}^{j_{k+1}}_{j_1,\cdots,j_k} = \prod_{l=1}^{k} a^{i_l}_{j_l} b^{j_{k+1}}_{i_{k+1}} T^{i_{k+1}}_{i_1,\cdots,i_k}.$$

注意到每个下标的变换和坐标变换相同, 上标的变换和坐标变换相逆, 故协变和反变的含义已经很清晰了.

注意到, 在黎曼流形上, 协变张量和反变张量被内积 (度量张量) 自然等同[1]. 对于一个 $(k,1)$ 型张量, 定义一个算子 $\tilde{T}:\mathscr{V}^{k+1}(M)\to C^\infty(M)$, 有

$$\tilde{T}(X_1,\cdots,X_{k+1})=\langle T(X_1,\cdots,X_k),X_{k+1}\rangle.$$

其是一个 $k+1$ 型协变张量, 故不在黎曼流形上区分这两种张量. 现在讨论指标升降: 注意到

$$T_{i_1,\cdots,i_{k+1}}=T^j_{i_1,\cdots,i_k}g_{j,i_{k+1}},$$

和

$$T^{i_{k+1}}_{i_1,\cdots,i_k}=T_{i_1,\cdots,i_k,j}g^{j,i_{k+1}},$$

则根据 Riesz 表现定理, 可以通过度量张量计算等同后的协变和反变张量的张量分量.

4.2 曲率

Definition 1 (曲率) 定义一个 $(3,1)$ 型张量 R, 有

$$R(X,Y,Z)=D_YD_XZ-D_XD_YZ-D_{[Y,X]}Z,$$

其中 $X,Y,Z\in\mathscr{V}(M)$, 称 R 为曲率张量.

Remark 4.1 注意到这一曲率的定义是内蕴的, 这一思想最早可以溯源至 *Gauβ*, 然而最早给出曲率的现代形式的人是 *Riemann*, 他在知名的《论奠定几何学基础的假设》中给出了截面曲率的定义——尽管那时候甚至没有流形的严格定义 *(*这一定义直到 *Weyl* 在他知名的著作 *The Concept of a Riemann Surface* 中才被给出, 在此之前人 *(Poincare)* 们用一些 $\mathbb{R}^n$ 中的不等式表示流形*)!*

注意到,R 具有如下等价形式:

1. $R(X,Y,Z)=D_YD_XZ-D_XD_YZ-D_{[Y,X]}Z$,
2. $R(X,Y,Z,W)=\langle R(X,Y,Z),W\rangle$,
3. $R(X,Y)=D_YD_X-D_XD_Y-D_{[Y,X]}$.

Example 4.2 (欧氏空间中的曲率) 对于第 k 个分量, 有

$$\begin{aligned}(R(X,Y,Z))^k&=(D_YD_XZ)^k-(D_XD_YZ)^k-(D_{[Y,X]}Z)^k\\&=D_YD_XZ^k-D_XD_YZ^k-D_{[Y,X]}Z^k\\&=YXZ^k-XYZ^k-[Y,X]Z^k\\&=[Y,X]Z^k-[Y,X]Z^k\\&=0.\end{aligned}$$

[1] 即指标升降.

注意到曲率是一个四阶的张量, 则可以计算其作用于局部基向量场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下的分量. 计算

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \underbrace{D_{[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}]} \frac{\partial}{\partial x^k}}_{=0},$$

Remark 4.2 粗略地看, 根据上式的第一个等号, 可以认为曲率就是向量场求二阶导时的可交换性.

对于第一项 $D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}$, 有

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} &= D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (\Gamma^m_{ik} \frac{\partial}{\partial x^m}) \\ &= \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} \frac{\partial}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

整理指标, 回带并对第二项做如下操作, 有张量分量

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im}.$$

根据这里的讨论, 可以看出曲率张量的复杂度是十分高的! 当 $n = 2$ 时其就有 $2^4 = 16$ 项,$n = 3$ 时有高达 $3^4 = 81$ 项, 所幸其有较好的对称性, 线性独立的分量个数并没有所想的那么多.

Proposition 4.1 (曲率张量的对称性)

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$,
2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$,
3. $R(X, Y, Z, W) + R(Z, X, Y, W) + R(Y, Z, X, W) = 0$ *(Bianchi)*,
4. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

其中, 第四款可以由前三款推出.

Proof.

1. 由定义直接得到成立,
2. 该命题等价于证明 $R(X, Y, Z, Z) = 0$, 计算

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \langle D_Y D_X Z, Z\rangle - \langle D_X D_Y Z, Z\rangle - \langle D_{[Y,X]} Z, Z\rangle \\ &= Y\langle D_X Z, Z\rangle - \langle D_X Z, D_Y Z\rangle - X\langle D_Y Z, Z\rangle + \langle D_Y Z, D_X Z\rangle - \langle D_{[Y,X]} Z, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2} YX\langle Z, Z\rangle - \frac{1}{2} XY\langle Z, Z\rangle - [Y, X]\langle Z, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}[Y, X]\langle Z, Z\rangle - \frac{1}{2}[Y, X]\langle Z, Z\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. 计算

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z)+R(Z,X,Y)+R(Y,Z,X)\\
=&\underbrace{D_YD_XZ}_{1}-\underbrace{D_XD_YZ}_{2}-D_{[Y,X]}Z\\
+&\underbrace{D_XD_ZY}_{2}-\underbrace{D_ZD_XY}_{3}-D_{[X,Z]}Y\\
+&\underbrace{D_ZD_YX}_{3}-\underbrace{D_YD_ZX}_{1}-D_{[Z,Y]}X\\
=&\underbrace{D_Y[X,Z]}_{a}+\underbrace{D_X[Z,Y]}_{b}+\underbrace{D_Z[Y,X]}_{c}-\underbrace{D_{[Y,X]}Z}_{c}-\underbrace{D_{[X,Z]}Y}_{a}-\underbrace{D_{[Z,Y]}X}_{b}\\
=&[Y,[X,Z]]+[X,[Z,Y]]+[Z,[Y,X]]\\
=&0.
\end{aligned}
$$

其中标有相同下括号指标的项合并.

4.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)&=-R(Z,X,Y,W)-R(Y,Z,X,W)\\
&=R(Z,X,W,Y)+R(Y,Z,W,X)\\
&=-\underbrace{R(W,Z,X,Y)}_{1}-R(X,W,Z,Y)-R(W,Y,Z,X)-\underbrace{R(Z,W,Y,X)}_{1}\\
&=2R(Z,W,X,Y)+\underbrace{R(X,W,Y,Z)+R(W,Y,X,Z)}_{\text{Bianchi}}\\
&=2R(Z,W,X,Y)-R(Y,X,W,Z),
\end{aligned}
$$

整理等式, 得到

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)+R(Y,X,W,Z)&=2R(Z,W,X,Y),\\
R(X,Y,Z,W)&=R(Z,W,X,Y).
\end{aligned}
$$

故明所欲证.

□

对于一个曲面 $f:(a,b)\to(c,d)\to M$, 回忆起对其求二阶混合导数可以交换顺序. 对于一个向量场 $X:(a,b)\times(c,d)\to TM$, 不妨假设其满足 $X(s,t)\in T_{f(s,t)}M$, 则称 X 是曲面上的向量场, 记作 $X\in\mathscr{V}(f)$.

对于该向量场, 注意到令 $X(\cdot,t)$ 沿 $f(\cdot,t)$ 求偏导数, 就是 $\partial X/\partial s$, 同理对于 $X(s,\cdot)$ 沿 $f(s,\cdot)$ 求偏导数, 得到 $\partial X/\partial t$. 再对得到的向量场分别对 s,t 求偏导, 得到四个二阶向量场

$$
\frac{\partial^2X}{\partial t^2},\qquad\frac{\partial^2X}{\partial s\partial t},\qquad\frac{\partial^2X}{\partial t\partial s},\qquad\frac{\partial^2X}{\partial^2s}.
$$

回忆起当 f 是一个函数时, 二阶混合导数可以交换顺序, 但是一般而言向量场做不到这一点.

Proposition 4.2 对于 $X \in \mathscr{V}(f)$, 断言

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} &= D_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} X - D_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s} X \\ &= R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}) X.\end{aligned}$$

<u>Proof.</u> 为了证明这一命题, 取局部坐标系分量 $f^i := (\varphi \circ f)^i$, 并记 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f^i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f^j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

回忆起向量场协变微分的公式, 得到

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \frac{\partial f^j}{\partial t} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

和二阶导

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} = &\underbrace{\frac{\partial^2 X^i}{\partial s \partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial X^i}{\partial t} \frac{\partial f^j}{\partial s} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial X^i}{\partial s} \frac{\partial f^j}{\partial t} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{2} + \underbrace{X^i \frac{\partial^2 f^j}{\partial s \partial t} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{1} + X^i \frac{\partial f^j}{\partial t} \frac{\partial f^k}{\partial s} D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

交换 s, t, 注意到标有下标 1 的两项和对应同项抵消, 标有 2 的两项互相抵消, 则有

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} = X^i \frac{\partial f^j}{\partial t} \frac{\partial f^k}{\partial s} D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial f^j}{\partial s} \frac{\partial f^k}{\partial t} D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

交换 j, k 的指标轮替, 得到

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} = X^i \frac{\partial f^k}{\partial s} \frac{\partial f^j}{\partial t} R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}),$$

注意到曲率张量的 $\mathscr{F}$-线性性, 有

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} = R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, X).$$

故明所欲证. □

这一命题将曲率张量的本质说的很清楚了, 其表示向量场沿曲面求二阶导数的可交换性.

4.3 截面曲率

Definition 1 (截面曲率) 考虑曲率张量 $R(X,Y,Z,W)$, 其中 $X,Y,Z,W \in TM_p$, 注意到其对称性, 不妨定义一个二元映射

$$\sec(X,Y) := R(X,Y,X,Y),$$

其中 $X,Y \in TM_p$, 称其为截面曲率[2].

Proposition 4.3 现在给出截面曲率的几条性质:

1. $\sec(X,Y) = \sec(Y,X)$(对称性),
2. $\sec(X,X) = 0$(反对称性),
3. $\sec(sX,tY) = s^2t^2\sec(X,Y)$(非线性性), 其中 $s,t \in \mathbb{R}$,
4. 可以通过 sec 反推出 R(即这二者等价). 有

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{(0,0)}(\sec(X+sZ,Y+tW) - \sec(X+sW,Y+tZ)).$$

Proof. 先计算

$$\begin{aligned}\sec(X+sZ,Y+tW) &= R(X+sZ,Y+tW,X+sZ,Y+tW)\\ &= R(X,Y,X+sZ,Y+tW) + tR(X,W,X+sZ,Y+tW)\\ &+ sR(Z,Y,X+sZ,Y+tW) + stR(Z,W,X+sZ,Y+tW).\end{aligned}$$

对 RHS 求混合导数, 即以 $\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{(0,0)}$ 作用, 得到

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{(0,0)} RHS = R(X,Y,Z,W) + R(X,W,Z,Y) + R(Z,Y,X,W) + R(Z,W,X,Y),$$

轮换 Z,W, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{(0,0)}(\sec(X+sZ,Y+tW) - \sec(X+sW,Y+tZ))\\ =&R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) \implies 2R(X,Y,Z,W)\\ +&R(X,W,Z,Y) - R(X,Z,W,Y) \implies R(X,Y,Z,W)\\ +&R(Z,Y,X,W) - R(W,Y,X,Z) \implies R(X,Y,Z,W)\\ +&R(Z,W,X,Y) - R(W,Z,X,Y) \implies 2R(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

则明所欲证.

[2]在一些书上 (如 [W89]) 其被称为相配二次型.

Remark 4.3 一个计算技巧是为了使用 *Bianchi* 恒等式, 可以将最后一项轮换至相同.

□

现在给出一个截面曲率的更几何的定义: 不妨考虑 $X, Y \in TM_p$ 且 X 和 Y 不平行, 以 $X \wedge Y$ 表示 X, Y 张成的平行四边形, 记 $|X \wedge Y|$ 是其面积, 有

$$|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 \sin^2\theta = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2.$$

称 $\sigma := span\{X, Y\}$ 是切丛 TM 上的 2-平面. 记

$$\Sigma := \{\sigma : \sigma \text{ is a 2-plane in } TM\}.$$

定义 σ 的截面曲率为

$$\sec(\sigma) := \frac{\sec(X, Y)}{|X \wedge Y|^2}.$$

为了验证这是良定义的, 即验证 $\sec(\sigma)$ 与 $X, Y \in TM_p$ 的选取无关, 不妨选取 2-平面中的一个标准正交基 $\{e_1, e_2\}$, 令 $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j$, 有

$$|X \wedge Y|^2 = \det(X, Y)^2 = (X^1Y^2 - X^2Y^1)^2,$$

为了验证 $\sec(\sigma) \equiv \sec(e_1, e_2)$, 带入 X, Y 得到

$$\begin{aligned}
\sec(X, Y) &= R(X, Y, X, Y) \\
&= R(X^1e_1 + X^2e_2, Y^1e_1 + Y^2e_2, X, Y) \\
&= (X^1Y^2 - X^2Y^1)R(e_1, e_2, X, Y) \\
&= (X^1Y^2 - X^2Y^1)^2R(e_1, e_2, e_1, e_2) \\
&= |X \wedge Y|^2 \sec(e_1, e_2).
\end{aligned}$$

故原命题得到证明.

Definition 2 (空间形式) 如果一个流形其在每一点的每个 2-平面 σ 上的截面曲率都是常数, 即对于 $\forall \sigma \in \Sigma$ 和 $\forall p \in M$, 有 $\sec(\sigma) \equiv K$. 称常截面曲率的流形为空间形式.

注意到对于度量 g 如果有截面曲率 K, 则对于度量 Ag 有截面曲率 K/A. 则可以将空间形式分类为截面曲率为 $1, 0, -1$ 的空间. 现在给出三个例子:

Example 4.3

1. $\mathbb{R}^n$ 的截面曲率为 0,
2. S^n 的截面曲率为 1,
3. $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, 其度量系数满足 $g_{ij} = \delta^i_j/x_n^2$, 其截面曲率为 -1.

断言这三个流形都是完备且单连通的. 可以证明, 完备, 单连通且常截面曲率的流形只有这三种.

现在观察常曲率流形的曲率张量.

Proposition 4.4 M 是一个曲率为 k 的空间形式, 当且仅当其曲率张量 R 满足

$$R(X,Y,Z,W) = k(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle).$$

Proof. " $\Longleftarrow$ ": 对于 σ 的标准正交基 $\{e_1,e_2\}$, 有

$$\begin{aligned}\sec(\sigma) = \sec(e_1,e_2) &= R(e_1,e_2,e_1,e_2),\\ R(e_1,e_2,e_1,e_2) &= k(\langle e_1,e_1\rangle\langle e_2,e_2\rangle - \langle e_1,e_2\rangle\langle e_1,e_2\rangle) = k.\end{aligned}$$

" $\Longrightarrow$ ": 首先注意到 $\sec(X,Y) = k|X\wedge Y|^2$, 有[3]

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\,|_{(0,0)}\ (k(|(X+sZ)\wedge(Y+tW)|^2 - |(X+sW)\wedge(Y+tZ)|^2))\\ &= k\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\,|_{(0,0)}\ (\\ &+ |X+sZ|^2|Y+tW|^2 \implies 4\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - 4\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle\\ &- \langle X+sZ, Y+tW\rangle^2 \implies -2(\langle Z,Y\rangle\langle X,W\rangle + \langle X,Y\rangle\langle Z,W\rangle)\\ &- |X+sW|^2|Y+tZ|^2\\ &+ \langle X+sW, Y+tZ\rangle^2)\\ &= \frac{1}{6}k(8\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - 8\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - 2\langle Z,Y\rangle\langle X,W\rangle + \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle)\\ &= k(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

□

4.4 张量 (续)

为了定义这两种曲率, 需要额外的张量知识. 对于 S,T 是两个 $(k,0)$-型张量和 $f,g\in C^\infty(M)$, 注意到对于 $X_i\in\mathscr{V}(M)$, 有

$$(fS+gT)(X_1,\cdots,X_k) = fS(X_1,\cdots,X_k) + gT(X_1,\cdots,X_k).$$

马上可以看出,$fS+gT$ 也是一个 $(k,0)$-型张量. 即同阶张量的 $\mathscr{F}$-线性组合仍然是同阶张量.

为了定义张量的缩并, 考虑一个内积空间 V, 其有一个基 $\{v_i\}_{i=1}^n$, 有 $g_{ij} = v_i\cdot v_j$. 如果取做标准正交基即 $\{e_i\}$, 则其度量系数为 δ^i_j. 记 $g^{-1}_{ij} = g^{ij}$. 对于线性算子 $A: V\to V$, 有

$$Av_i = A^j_i v_j,$$

[3]这里主要的方法是链式法则和每求一次偏导就将该变量 = 0 取出来简化计算.

则通过其分量表示, 定义线性算子 A 的迹

$$\operatorname{tr} A = A_i^i.$$

为了验证其良定义, 不妨取 $\tilde{v}_i = a_i^j v_j$, 有 $v_i = b_i^j \tilde{v}_j$, 且 $a_i^j b_j^k = \delta_i^k$. 有

$$\begin{aligned} A\tilde{v}_i &= \tilde{A}_i^j \tilde{v}_j \\ &= a_a^j A v_j \\ &= a_i^j A_j^k v_k \\ &= a_i^j A_j^k b_k^m \tilde{v}_m, \end{aligned}$$

由系数的唯一性, 得到

$$\tilde{A}_i^j = a_i^j A_j^k b_k^i.$$

则有

$$\tilde{A}_i^i = \sum_j \sum_k \delta_k^j A_j^k = \sum_j A_j^j.$$

故其是良定义的.

现在考虑双线性算子 $B : V \times V \to \mathbb{R}$ 是一个双线性算子, 有 v_i 基下分量 $B_{ij} = B(v_n, v_j)$. 注意到由 Riesz 表现定理, 唯一存在线性算子 A 满足 $B(u, v) = \langle Au, v\rangle$, 则定义

$$\operatorname{tr} B := \operatorname{tr} A.$$

计算其分量为

$$B_{ij} = \langle Av_i, v_j\rangle = \langle A_i^k v_k, v_j\rangle = A_i^k g_{kj}.$$

反之, 有

$$A_i^j = B_{ik} g^{jk}.$$

故得到

$$\operatorname{tr} B = B_{ij} g^{ij}.$$

如果 v_i 是单位正交基, 有

$$\operatorname{tr} B = \sum_i B_{ii} = \sum_i B(e_i, e_i).$$

现在定义张量的迹, 令 $S : \mathscr{V}(M) \times \mathscr{V}(M) \to C^\infty(M)$ 是一个 $(2, 0)$ 型张量, 对于 $p \in M$,$S(p)$ 是一个 TM_p 上的双线性算子. 则可以计算 $S(p)$ 的迹. 则逐点定义, 张量 S 的迹是 M 上的一个函数, 对于 $\forall p \in M$, 定义 $\operatorname{tr} S \in C^\infty(M)$ 为

$$(\operatorname{tr} S)(p) := \operatorname{tr}(S_p).$$

容易验证其是光滑的. 考虑在一个局部坐标系内, 有

$$\operatorname{tr} S = S_{ij} g^{ij} =: S_i^i.$$

利用度规系数做的这一操作被称之为指标的缩并.

Proposition 4.5

tr 是 $\mathscr{F}$-线性的, 即对于 $f, g \in C^\infty(M)$, 有

$$\mathrm{tr}\,(fS + gT) = f\,\mathrm{tr}\,(S) + g\,\mathrm{tr}\,(T),$$

Example 4.4 现将指标缩并之例略举数端如下:

考虑度量张量 g, 其迹为 $g_{ij}g^{ij} = \delta_i^i = n$. 其中 n 是流形的维数.

2. 对于三阶协变张量 T, 固定其第一个自变量 X, 则得到一个二阶张量 $T(X,\cdot,\cdot)$, 则有一阶张量 $T_{(2,3)} : \mathscr{V}(M) \to \mathbb{R}$, 对于 $X \in \mathscr{V}(M)$ 定义为

$$T_{(2,3)}X = \mathrm{tr}\,(T(X,\cdot,\cdot)).$$

现在验证 $T_{(2,3)}$ 是 $\mathscr{F}$-线性的. 对于

$$\begin{aligned} T_{(2,3)}(fX + gY) &= \mathrm{tr}\,(T(fX + gY,\cdot,\cdot)) \\ &= \mathrm{tr}\,(fT(X,\cdot,\cdot) + gT(Y,\cdot,\cdot)) \\ &= f\,\mathrm{tr}\,(T(X,\cdot,\cdot)) + g\,\mathrm{tr}\,(T(X,\cdot,\cdot)) \\ &= fT_{(2,3)}(X) + gT_{(2,3)}(Y). \end{aligned}$$

明所欲证. 现在写出 $T_{(2,3)}$ 的分量形式. 对于 $T_{(2,3)i}$, 有

$$\begin{aligned} T_{(2,3)i} &= \mathrm{tr}\,(T(\frac{\partial}{\partial x^i},\cdot,\cdot)) \\ &= T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k})g^{jk} \\ &= T_{ijk}g^{jk}. \end{aligned}$$

同理, 可以对其他任意两个指标缩并, 即

$$\begin{aligned} T_{(1,3)i} &= T_{jik}g^{jk}, \\ T_{(1,2)i} &= T_{jki}g^{jk}. \end{aligned}$$

3. 对于一个四阶协变张量 T, 其进行一次指标缩并之后得到一个二阶张量, 如

$$T_{(1,2)ij} = T_{klij}g^{kl}.$$

4.5 Ricci 曲率, 标量曲率

对于四阶协变张量 R, 其自然是十分复杂的. 因此将其缩并以方便理解与运算.

注意到将 R 做一次缩并, 有 $C_4^2 = 6$ 种可能, 但根据曲率张量的对称性, 其并非全是线性独立的. 考虑在 TM_p 的一个标准正交基 $\{e_i\}$ 下, 有

$$\begin{aligned} R_{(1,2)}(e_i, e_j) &= \operatorname{tr}(R(\cdot, \cdot, e_i, e_j)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} R(e_k, e_k, e_i, e_j) \\ &= 0(\text{by anti-symmetric}). \end{aligned}$$

同样根据反对称性, 得到

$$\begin{aligned} R_{(3,4)} &= 0, \\ R_{(1,3)} &= R_{(2,4)}, \\ R_{(1,3)} + R_{(1,4)} &= 0, \\ R_{(2,3)} + R_{(2,4)} &= 0, \end{aligned}$$

故实际上只有 $R_{(1,3)} = R_{(2,4)}$ 一个独立的张量, 称其为 Ricci 曲率, 记作

$$\mathrm{Ric} = R_{(2,4)}.$$

有分量表达

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j) &= \operatorname{tr}(R(e_i, \cdot, e_j, \cdot)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr} R(e_i, e_k, e_j, e_k). \end{aligned}$$

注意到 (类似范数和内积的关系), 如果 $\mathrm{Ric}(e_i, e_i)$ 对于每个 i 已知, 就可以反推出 Ric , 但是实际上

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sec\{span\{e_i, e_j\}\}.$$

所以实际上 Ricci 曲率的几何表述就是截面曲率之和. 注意到看上去可以通过截面曲率反推回黎曼曲率张量, 也就是说这一缩并不会损失信息——实则不然. 当计算 4 维及以上空间的 Ricci 曲率时, 并不能还原回截面曲率; 换言之, 先前的反推不过是有限的对称性使然.

计算二维情况, 令 $dimM = 2$, 对于 $p \in M$ 取 e_1, e_2 满足 $span\{e_1, e_2\} = TM_p$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_1, e_1) &= \operatorname{tr}(R(e_1, \cdot, e_1, \cdot)) \\ &= \sum_{i=1,2} R(e_1, e_i, e_1, e_i) \\ &= \sec(e_1, e_2). \end{aligned}$$

现在考虑 $dimM = 3, \sigma = span\{e_1, e_2\} \subseteq TM_p$, 则经过计算可以得到

$$\sec(\sigma) = \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}\,(e_1, e_1) + \mathrm{Ric}\,(e_2, e_2) - \mathrm{Ric}\,(e_3, e_3)).$$

对 Ricci 曲率再做一次缩并, 得到一个光滑函数, 被称为标量曲率, 记作 Scal, 即

$$\mathrm{Scal} := \mathrm{tr}\,(\mathrm{Ric}\,) = R_{ijkl} g^{jl} g^{ik}.$$

Example 4.5 (数量曲率之例) 当 $\sec \equiv 1$ 的时候, 注意到 $R(e_i, e_j, e_i, e_j)$ 当 $i = j$ 时消没, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal} &= \sum_j \mathrm{Ric}\,(e_j, e_j) \\ &= \sum_j \sum_i R(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= n(n-1).\end{aligned}$$

4.6 协变微分

为了给张量求导, 需要注意这一定义的良定义性, 即保证求导之后张量型不变. 先定义方向导数:

Definition 1 (方向导数) 对于一个 k 阶协变张量 T, 为了保证其 $\mathscr{F}$-线性性, 对于 $X_i \in \mathscr{V}(M)$, 定义其沿着 $X \in \mathscr{V}(M)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned}&D_X T : \mathscr{V}^k(M) \to C^\infty(M), \\ &\quad (X_1, \cdots, X_k) \mapsto X(T(X_1, \cdots, X_n)) \\ &\qquad\qquad - T(D_X X_1, \cdots, X_n) - T(X_1, D_X X_2, \cdots, X_n) - \cdots - T(X_1, \cdots, D_X X_n).\end{aligned}$$

其 $\mathscr{F}$-线性性直接计算验证即可.

Definition 2 (协变微分) 对于一个 k 阶协变张量 T, 定义其协变微分 DT 是一个 $k+1$ 阶协变张量, 定义为

$$DT(X_1, \cdots, X_n)(X) = (D_X T)(X_1, \cdots, X_n).$$

Example 4.6 考虑度量张量 g 在 *Levi-Civita* 联络下的协变微分. 对于 $\forall X, Y, Z \in TM_p$, 根据 *Levi-Civita* 联络的保度量性, 都有

$$D_X g(Y, Z) = X\langle Y, Z\rangle - \langle D_X Y, Z\rangle - \langle X, D_Y Z\rangle = 0.$$

Proposition 4.6 (Bianchi 2nd Identity) 对于曲率张量 R 和 $X, Y, U, W, V \in \mathscr{V}(M)$, 有

$$DR(X,Y,U,V,W) + DR(X,Y,W,U,V) + DR(X,Y,V,W,U) = 0.$$

<u>Proof.</u> 注意到

$$\begin{aligned}
&DR(X,Y,U,V,W)\\
=&(D_W R)(X,Y,U,V)\\
=&W(R(X,Y,U,V)) \implies W(R(U,V,X,Y))\\
&- R(D_W X,Y,U,V) \implies -R(U,V,D_W X,Y)\\
&- R(X,D_W Y,U,V) \implies -R(U,V,X,D_W Y)\\
&- R(X,Y,D_W U,V) \implies -R(D_W U,V,X,Y)\\
&- R(X,Y,U,D_W V) \implies -R(U,D_W V,X,Y)\\
=&(D_W R)(U,V,X,Y)\\
=&DR(U,V,X,Y,W).
\end{aligned}$$

观察到这一对称性, 对三项中每一项都做如此操作, 且注意到其是张量, 则证明原恒等式等价于

$$DR(u,v,x,y,w) + DR(w,u,x,y,v) + DR(v,w,x,y,u) = 0,$$

对于 $\forall p \in M$ 逐点成立. 其中 $u = U(p) \in TM_p$,etc.

取在 TM_p 的一个单位正交基 $\{e_i\}$, 则只需要证明

$$\sigma(DR(e_i, e_j.e_\alpha, e_\beta, e_k)) = 0.$$

其中 $\sigma := \sum_{sym,i,j,k}$ 表示对 i,j,k 轮换求和. 根据平行移动的理论, 某点处的基向量标架 $\{e_i\}$ 可以[4]延拓成一个测地标架 $\{E_i\}$, 即其满足 $D_{e_i}E_j = 0$, 对于 $\forall i,j$ 成立. 则需要证明在 p 点有

$$\sigma(DR(E_i, E_j, E_\alpha, E_\beta, E_k)) = 0$$

成立. 有

$$\begin{aligned}
LHS &= \sigma((D_{E_k}R)(E_i,E_j,E_\alpha,E_\beta))\\
&= \sigma(E_k(R(E_i,E_j,E_\alpha,E_\beta)))\\
&- \sigma(R(D_{E_k}E_i,E_j,E_\alpha,E_\beta)) \implies 0\\
&- \sigma(R(E_i,D_{E_k}E_j,E_\alpha,E_\beta) \implies 0\\
&- \sigma(R(E_i,E_j,D_{E_k}E_\alpha,E_\beta) \implies 0\\
&- \sigma(E_i,E_j,E_\alpha,R(D_{E_k}E_\beta) \implies 0\\
&= \sigma(E_k\langle R(E_i,E_j,E_k\alpha),E_\beta\rangle)\\
&= \sigma(\langle D_{E_k}(R(E_i,E_j,E_\alpha),E_\beta\rangle)) + \underbrace{\sigma(\langle R(E_i,E_j,E_\alpha),D_{E_k}E_\beta\rangle)}_{=0}.
\end{aligned}$$

[4]考虑 p 点的测地球, 取 E_j 满足 $E_j(0) = e_j$ 且其沿着所有径向测地线平行移动, 即对于 γ 是满足 $\dot\gamma(0) = e_i$ 的径向测地线而言, 满足 $\frac{d}{dt}|_{t=0} E_j \circ \gamma = 0$, 即 $D_{e_i}E_j = 0$.

诸项等于 0 是因为测地标架场的性质. 则只需要证明 $\sigma(D_{E_k}R(E_i,E_j,E_\alpha))=0$. 写出曲率张量的具体形式, 则只需要证明

$$\begin{aligned}
0 =&\sigma(D_{E_k}D_{E_j}D_{E_i}E_\alpha) \implies \sigma(D_{E_j}D_{E_i}D_{E_k}E_\alpha)\\
&-\sigma(D_{E_k}D_{E_i}D_{E_j}E_\alpha) \implies -\sigma(D_{E_i}D_{E_j}D_{E_k}E_\alpha)\\
&-\sigma(D_{E_k}D_{[E_j,E_i]}E_\alpha)\\
&\quad\implies -\sigma(D_{[E_j,E_i]}D_{E_k}E_\alpha)-\underbrace{\sigma([E_k,[E_j,E_i]]E_\alpha)}_{=0}+\sigma(R([E_j,E_i],E_k,E_\alpha))_{=0}.
\end{aligned}$$

由于轮换求和, 前两个"$\implies$" 成立, 第一个下括号的"$=0$" 是因为 Jacobi 恒等式, 第二个下括号的"$=0$" 是因为 $[E_j,E_i]=D_{E_j}E_i-D_{E_i}E_j$, 根据测地标架的性质得到该项为 0. 则得到剩下不消没的三项具有曲率的形式, 则只需要证明

$$\sigma(R(E_i,E_j,D_{E_k}E_\alpha))=0.$$

同样注意到测地标架场, 则有 $D_{E_k}E_\alpha=0$ 成立, 原命题得证. □

5 子流形几何学

5.1 子流形

Definition 1 (子流形) *对于 $M, \bar{M}$ 是两个微分流形, 称 $M \subseteq \bar{M}$, 如果存在一个恒等映射 $i : M \to \bar{M}, i(x) = x$ 满足:*

1. *i 的前推 i_* 在每一点都是单射 (即 i 是浸入),*
2. *对于开集 $\forall \Omega \in M$, 都是开集 $\bar{\Omega} \in \bar{M}$ 和 M 的交集,*

此时称 M 是 $\bar{M}$ 的子流形,i 称为嵌入映射,$\bar{M}$ 称为环境空间 (ambience space).

为了从几何的角度解释此事, 注意到嵌入映射在每一点都是单射这一事实保证了 M 的切空间 TM_p 是 $T\bar{M}_p$ 的一个子空间, 换言之,i_* 是一个 TM_p 和 $T\bar{M}_p$ 的某个子空间的线性同构. 后文中将不对 i_*TM_p 和 TM_p 做区分.

第二个条件保证了 $p \in M$ 的一个邻域是 $i(p) \equiv p \in \bar{M}$ 的一个邻域交 M, 这说明了 M 遗传了 $\bar{M}$ 的拓扑. 实际上, 这两个定义都是 $\mathbb{R}^3$ 中曲线与曲面的微分几何内容的推广.

Example 5.1 *注意到 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子流形. 更一般地, 欧氏空间中的正则曲面都是对应欧氏空间的子流形.*

后文中假设 $dimM = m, dim\bar{M} = m + k$, 则称 k 为 M 的余维数. 现在考虑黎曼流形的情形. 对于 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$, 其中 M 是 $\bar{M}$ 的子流形, 则有嵌入映射 i. 如果嵌入映射是一个等距, 即对于 $\forall p \in M, u, v \in TM_p$, 有

$$\bar{g}(i_{*p}(u), i_{*p}(v)) = g(u, v),$$

或略记为 $\langle u, v\rangle_{\bar{M}} = \langle u, v\rangle_M$, 则称 i 是一个等距嵌入. 后文中提到的嵌入都是等距嵌入, 其意义是子流形上的度量是环境空间的度量的拉回.

Theorem 1 (子流形坐标系) *令 $p \in M$, 则存在一个 $\bar{M}$ 上的局部坐标系 φ, 满足 $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \bar{M}, \varphi(0, 0) = p$, 和*

1. *$\varphi(x, 0) \in M, \forall x \in \mathbb{R}^m$,*
2. *$\psi : \mathbb{R}^m \to M, \psi(x) := \varphi(x, 0)$ 是一个 M 上 p 点附近的局部坐标系.*

Proof. 不过是秩定理的简单推论罢了 (浸入标准型). □

根据这一定理, 我们可以将子流形切空间中的基向量场用大流形切空间的基向量场表示出来, 即可以找到一个上文中的坐标映射 $\varphi = \varphi(x, y)$ 和 $p \in M$, 有

$$T\bar{M}_p = span\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}, TM_p = span\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}.$$

Proposition 5.1 *记 $M, \bar{M}$ 上的联络分别为 $D, \bar{D}$, 对于 $v \in TM_p, X, Y \in \mathscr{V}(\bar{M})$. 如果 $X\mid_M = Y\mid_m$, 则 $\bar{D}_v X = \bar{D}_v Y$.*

Proof. 首先注意到存在 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \bar{M}$ 满足 $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = (v, \vec{0})$ 和 $\gamma(t) \in M$ 对于 $\forall t$ 成立, 且 $\frac{d}{dt}\mid_{t=0} X \circ \gamma = \bar{D}_v X, \frac{d}{dt}\mid_{t=0} Y \circ \gamma = \bar{D}_v Y$. 则原命题成立. □

5.2 正交分解

注意到 $TM_p \subseteq T\bar{M}_p$, 则存在 TM_p 在 $T\bar{M}_p$ 中的正交补, 记作 $TM_p^{\perp}$, 称为 p 点在 $\bar{M}$ 的法空间.

Definition 1 (子流形向量场) *对于 $X : M \to T\bar{M}$, 满足 $X(p) \in T\bar{M}_p$ 对于 $\forall p \in M$ 成立, 则称 X 是子流形 M 在 $\bar{M}$ 中的向量场 (不一定和 M 相切!).*

*如果这个向量场在每一点都和子流形相切, 即 $\forall p \in M, X(p) \in TM_p$, 则称 X 是子流形 M 的**切**向量场.*

*如果这个向量场在每一点都和子流形垂直, 即 $\forall p \in M, X(p) \in TM_p^{\perp}$, 则称 X 是子流形 M 的**法**向量场.*

分别记 M 上的向量场, 切向量场, 法向量场为 $\mathscr{V}(M), \mathscr{V}^T(M), \mathscr{V}^{\perp}(M)$.$\bar{M}$ 上的向量场仍然记作 $\mathscr{V}(\bar{M})$.

注意到 M 上的每个向量场 X 都可以逐点分解从而分解为切方向的向量场 X^T 和法方向的向量场 $X^{\perp}$.

对于 $X \in \mathscr{V}(M), v \in TM_p, p \in M$, 定义 $\bar{D}_v X = \bar{D}_v \tilde{X}$, 其中 $\tilde{X} \in \mathscr{V}(\bar{M})$ 是 X 的一个在 M 中的局部延拓[1].

对于 $X \in \mathscr{V}^T(M), Y \in \mathscr{V}(M)$, 定义 $\bar{D}_X Y(p) := \bar{D}_{X(p)} Y$. 注意到 $\bar{D}_X Y$ 对于 $X, Y \in \mathscr{V}(M)$ 是没有定义的, 因为如果对于 M 的切方向之外的的分量求导, 则势必会用到 Y 在 M 之外的值, 然而其是未定义的.

现在考察关于 Lie 括号在子流形上的可继承性:

Proposition 5.2 *对于 $X, Y \in \mathscr{V}(\bar{M})$, 若 $X\mid_M, Y\mid_M \in \mathscr{V}^T(M)$, 则有*

$$[X, Y]\mid_M = [[X\mid_M, Y\mid_M]].$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\bar{M}$ 上的 Lie 括号,$[[\cdot,\cdot]]$ 表示 M 上的 Lie 括号.

[1] 注意到整体延拓不一定存在.

Proof. 取子流形坐标系 $\varphi = \varphi(x, y)$ 是 $\bar{M}$ 上的局部坐标系, 满足 $\varphi(0,0) = p \in M$, 定义 $\psi(x) = \varphi(x, 0)$ 是 M 上的局部坐标系. 为了区分, 对于 x 分量用拉丁字母表记, 对于 y 分量用希腊字母表记. 有

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X^{m+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$
$$Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^{m+\beta} \frac{\partial}{\partial y^\beta},$$

为了保证其限制切于 M, 有 $X^{m+\alpha} \mid_M, Y^{m+\beta} \mid_M \equiv 0$. 直接计算 Lie 括号, 首先注意到 $X \mid_M = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_M, Y \mid_M = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \mid_M$, 故下式中第一个" $\Longrightarrow$ " 成立, 为了证明后三项都是 0, 计算第二项作为范例, 有

$$[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^{j+\beta} \frac{\partial}{\partial y^\beta}] \mid_M = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial Y^{m+\beta}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \mid_M - Y^{m+\beta} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \mid_M = 0.$$

则得到

$$\begin{aligned}
&[X, Y] \mid_M \\
=&[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}] \mid_M \Longrightarrow [[X \mid_M, Y \mid_M]] \\
+&[X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^{j+\beta} \frac{\partial}{\partial y^\beta}] \mid_M \\
+&[X^{m+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}] \mid_M \\
+&[X^{m+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, Y^{m+\beta} \frac{\partial}{\partial y^\beta}] \mid_M .
\end{aligned}$$

故明所欲证. □

联系古典微分几何的观点, 研究子流形上的向量场, 就可以刻画子流形的形状.

Proposition 5.3 (子流形联络) *对于 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathscr{V}(\bar{M}), X, Y, Z \in \mathscr{V}^T(M)$, 有:*

1. $\bar{D}_X(\alpha\bar{X} + \beta\bar{Y}) = \alpha\bar{D}_X\bar{X} + \beta\bar{D}_X\bar{Y}$, *其中* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
2. $\bar{D}_{fX+gY}\bar{Z} = f\bar{D}_X\bar{Z} + g\bar{D}_Y\bar{Z}$, *其中* $f, g \in C^\infty(M)$,
3. $\bar{D}_X(f\bar{Y}) = (Xf)\bar{Y} + f\bar{D}_X\bar{Y}$,
4. $X\langle\bar{Y}, \bar{Z}\rangle = \langle\bar{D}_X\bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle\bar{Y}, \bar{D}_X\bar{Z}\rangle$,
5. $\bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X = [X, Y]$.

Theorem 1 *对于 $X, Y \in \mathscr{V}^T(M)$, 记 $\cdot^T$ 为 M 切方向上的投影,D 是 M 上得 Levi-Civita 联络, 则有*

$$D_X Y = (\bar{D}_X Y)^T.$$

Proof. 定义 $\tilde{D} : \mathscr{V}^{T,2}(M) \to \mathscr{V}^T(M), \tilde{D}_X Y = (\bar{D}_X Y)^T$, 则只需要证明 $\tilde{D}$ 是一个 M 上的 Levi-Civita 联络, 就可以通过唯一性说明其和 D 等价. □

5.3 二次型

定义一个算子 $B:\mathscr{V}^{T,2}\to\mathscr{V}^{\perp}(M), B(X,Y)=(\bar{D}_XY)^{\perp}$, 其中 $X,Y\in\mathscr{V}^T(M)$. 则显然有正交分解

$$\bar{D}_XY=D_XY+B(X,Y)$$

首先注意到 B 是线性的, 现在断言

Proposition 5.4 *B 关于 X,Y 都是 $\mathscr{F}$-线性的和对称的.*

Proof.

$$\begin{aligned}B(X,Y)-B(Y,X)&=(\bar{D}_XY)^{\perp}-(\bar{D}_YX)^{\perp}\\&=(\bar{D}_XY-\bar{D}_YX)^{\perp}\\&=[X,Y]^{\perp}\\&=0.\end{aligned}$$

最后一个等号是因为 $X,Y\in\mathscr{V}^T(M)\implies[X,Y]\in\mathscr{V}^T(M)$. 则对称性得到证明. 显然 B 对于 X 是 $\mathscr{F}$-线性的, 由对称性得到对 Y 的 $\mathscr{F}$-线性性. □

对于 $\eta\in\mathscr{V}^{\perp}(M)$, 定义 $H_\eta:\mathscr{V}^{T,2}\to C^\infty(M), H_\eta(X,Y)=\langle B(X,Y),\eta\rangle$, 其中 $X,Y\in\mathscr{V}^T(M)$.

显然 H_η 关于 X,Y 对称, 关于 X,Y,η 都是 $\mathscr{F}$-线性的, 则可以定义这样一个算子:

对于 $v\in TM_p^{\perp}$, 取其局部延拓 η, 可以定义 $H_V:(TM_p)^2\to\mathbb{R}, H_v(x,y)=H_\eta(X,Y)$, 其中 $X,Y\in\mathscr{V}^T(M)$ 是 x,y 的联络. 注意到显然 H_v 是一个对称双线性算子, 则其和某个二次型是等价的.

Definition 1 (第二基本形式) *对于 $p\in M, v\in TM_p^{\perp}, x\in TM_p$, 定义 p 点的第二基本形式为*

$$II_v(x):=H_v(x,x).$$

Example 5.2 *对于光滑函数 $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 满足 $f(0)=0, Df(0)=0$, 定义流形 M 是 f 的图像,$\bar{M}=\mathbb{R}^{n+1}$, 则对于 $e_{n+1}\in TM_0\perp\subseteq T\bar{M}_0$, 有*

$$II_{e_{n+1}}(x)=x^TD^2f(0)x.$$

实际上如切于原点的球 S^n, 有其在原点处的二次型为

$$II(x)=|x|^2.$$

5 Bibliography

[W89] 黎曼几何初步, 伍鸿熙, 陈维桓, 1989, 北京大学出版社.

[dC92] Riemannian Geometry, M. P. do Carmo, 1992, Springer.

[Lee02] Introduction to Smooth Manifolds, J. M. Lee, 2002, Internet released.