解析数论入门

Preliminary of Analytic Number Theory

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 11 月 12 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI’AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

➤ **标题：** 解析数论入门 - *Preliminary of Analytic Number Theory*
➤ **作者：** 数试 82 裴兆辰
➤ **校对排版：** 钱院学辅排版组
➤ **出品时间：** 2020 年 11 月 12 日
➤ **总页数：** 41

前言

解析数论作为数论问题中的一个重要分支，已经引起了大家的重视，并且在近 100 年之中取得了长足的进步与发展，同代数数论一起探究数域中素元的相关命题。而解析数论则更加贴近于利用分析的手段来探究整数中素数的性质。

鉴于编写时间有限，难以将体系化的内容完整的呈现于资料之中。故在阅读此资料之前，读者需要先修过初等数论的相关内容，可以参阅但不局限于以下参考书籍：

潘承彪 潘承洞 著	《初等数论》
闵嗣鹤 著	《初等数论》
H.Rosen 著	《初等数论及其应用》
Apstol 著	《解析数论导引》
G.Tenenbaum 著 陈华一 译	《解析与概率数论导引》

内容中的第四、五、六章中要涉及大量的复变函数内容，也是本资料的核心部分，所得结论在后续的学习中依然会多次使用。此部分可将如下书籍作为参考：

余家荣 路见可 主编	《复变函数专题选讲》
M.Stein 著	《Complex Analysis》

笔记中某些定理内容可能难度较高，证明过程冗长而无趣，故希望读者在阅读过程中有所取舍。本资料目前所展示的内容只是作者在学习过程中的笔记内容，在解析数论体系中只是沧海一粟，作者也会定期对内容进行更新与完善。若是具有能力的同学能够从中有所启发、有所收获，作者甚是欣慰与感激。

数试 82 裴兆辰

2020 年 11 月 12 日

参与排版成员

➤ **排版与整理：**数试 82 裴兆辰

目录

第一章 数论函数简介

§1.1 数论函数

在此部分中我们默认读者已对初等数论的内容有所了解，故内容较为精简。

所谓**数论函数**是指定义在正整数集上的复值函数，其中的两类函数尤其重要：

若数论函数 f 满足

$$f(mn)=f(m)+f(n)\qquad (\text{若 (m,n)=1}),$$

，则称它是**加性**的

若 $f(1)=1$ 且

$$f(mn)=f(m)f(n)\qquad (\text{若 (m,n)=1})$$

, 则称它是**乘性（积性，可乘）**的。

此外若加性函数满足的等式对不互素的正整数 m,n 也成立，则称 f 是**完全加性**的，同样的我们也定义**完全乘性**

在此我们列举出如下经典的数论函数：

• n 的素因子个数 (计算或不计算重数)

$$\Omega(n)=\sum_{p^\nu\|n}\nu\qquad \omega(n)=\sum_{p^\nu\|n}1=\sum_{p|n}1$$

• 因子个数或因子的 k 次幂和

$$\tau(n)=\sum_{d|n}1\qquad \tau_k(n)=\sum_{d|n}d^k\ (k\in\mathbb{C})$$

习惯上记 $\sigma_1(n)=\sigma(n)$

•$Euler$ 示性函数:

$$\varphi(n)=\sum_{1\leqslant h\leqslant n,(h,n)=1}1$$

•$M\ddot{o}bius$ 函数：

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^{\omega(n)} & \text{若 n 无平方因子}\\ 0 & \text{若 n 有平方因子}\end{cases}$$

•Mangoldt 函数

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & \text{若 } n=p^{\nu}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

根据上述表达式，我们不加证明地给出如下一系列结论，请读者自行使用初等方法验证：

定理 1.1.1. 对任意正整数 $m,n,$ 有：
(a)Ω 和 ω 是可加的，并且其中前者是完全可加的
(b) 因子个数函数是可乘的，并且有

$$\tau(n)=\prod_{p^{\nu}||q}(\nu+1)$$

(c)$Möbius$ 函数是乘性函数，但不是完全乘性的
(d)Euler 示性函数是乘性函数，并且有：

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

(e)

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\left(\frac{d}{\varphi(d)}\right)$$

(f)

$$n=\sum_{d|n}\varphi(d)$$

(g)

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=1 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$$

(h)

$$\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

(i) 若 $m\big|n,$ 则 $\varphi(m)\big|\varphi(n)$

§1.2 数论函数环

定义 1.2.1. 设 f 为数论函数，则称形式级数

$$D(f;s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s}$$

为 f 的形式 *Dirichlet* 幂级数，

在本章中我们只探究形式上的正确性，对其收敛性的讨论会在下一章中进行.

对于数论函数 f,g, 对于形如：

$$h(n)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})$$

的函数，我们称 h 为 f 与 g 的 Dirichlet 卷积，记为 $h=f*g$

根据上面的定义，请读者自行验证：

定理 1.2.1. 狄利克雷卷积满足交换律和结合律

我们在数论函数对应的狄利克雷级数上定义加法结构和乘法结构：

$$D(f+g;s)=D(f;s)+D(g;s)$$

$$D(f*g;s)=D(f;s)D(g;s)$$

故我们现在可以建立一个映射 T, 满足对取定的复数 s, 有 $T(f)=D(f;s)$，故 T 是一个双射

我们再引入两个特殊的数论函数：

$$j(n)=n \quad (n\geqslant 1)$$

$$u(n)=1 \quad (n\geqslant 1)$$

显然这两个函数都是乘性的

再引入恒等函数

$$I(n)=\begin{cases}1 & \text{n=1}\\ 0 & \text{n>1}\end{cases}$$

定理 1.2.2. 对所有的数论函数 f, 我们有 $I*f=f*I=f$，故 I 是数论函数乘法的单位元

请自行验证这一定理的正确性

此外我们注意到对于数论函数 f,g，若 $f*g=0$, 则必有 $f=0$ 或 $g=0$.

因此我们可以得到，所有数论函数的集合 $\mathbb{A}$ 构成了一个整环。实质上还可以证明 $\mathbb{A}$ 是唯一因子分解环，在这里我们不做证明。

定理 1.2.3. *若 f 是一个数论函数且 $f(1)\neq 0$，则存在唯一的一个数论函数 g 使得*

$$f*g=g*f=I$$

我们称 g 为数论函数 f 的逆元，记为 f^{-1}，并且满足

$$f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)}\quad,\quad f^{-1}(n)=\frac{-1}{f(1)}\sum_{d|n,d<n}f\Big(\frac{n}{d}\Big)f^{-1}(d)\ ,(n>1)$$

证明. 对于给定的 f，我们将证明方程 $(f*f^{-1})(n)=I(n)$ 对函数值 $f^{-1}(n)$ 的解是唯一的，$n=1$ 时显然，现在假设对所有的 $k<n$，函数值 $f^{-1}(k)$ 是唯一确定的。

该方程可被写为：

$$\sum_{d|n}f(\frac{n}{d})f^{-1}(d)=0$$

即

$$f(1)f^{-1}(n)+\sum_{d|n,d<n}f\Big(\frac{n}{d}\Big)f^{-1}(d)=0$$

, 故由数学归纳法得证 □

根据上一定理我们立即得到结论：

定理 1.2.4. *环 $\mathbb{A}$ 的可逆元组成的群 $\mathbb{G}$ 是由满足 $f(1)\neq 0$ 的数论函数 f 构成的*

定理 1.2.5. *乘性函数 f 都是可逆的, 并且 $f(1)=1$*

我们不难验证 $T(\mathbb{A})$ 也为整环，称为 Dirichlet 级数环, 记为 $\mathbb{D}$，故 T 即为 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{D}$ 的一个同构。

定理 1.2.6. *设 f 为数论函数，并且 $f(1)=1$, 则：*
(a) f 是积性的当且仅当

$$f\Big(\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}\Big)=\prod_{i=1}^{r}f(p_i)^{r_i}$$

对所有的素数 p_i 和正整数 α_i 成立
(b) 若 f 是积性的，则 f 是完全积性的当且仅当

$$f(p^{\alpha})=f(p)^{\alpha}$$

对所有的素数 p 和正整数 α 成立

这个证明是容易的，请读者自行证明。

我们下面证明 $\mathbb{A}$ 中的乘性函数构成了 $\mathbb{G}$ 的一个子群

定理 1.2.7. 若数论函数 f,g 都是乘性的，那么狄利克雷乘积 $f*g$ 也乘性的

证明. 令 $h=f*g$，设 m,n 为互素的两个正整数，则：

$$h(mn)=\sum_{c|mn}f(c)g\Big(\frac{mn}{c}\Big)$$

由于 m,n 互素，则 c 存在唯一的分解方式 $c=ab$ 使得 $a\big|m$ 且 $b\big|n$, 并且有 $\left(\frac{m}{a},\frac{n}{b}\right)=1$, 故

$$\begin{aligned}
h(mn)&=\sum_{a|m,\ b|n}f(ab)g\Big(\frac{mn}{ab}\Big)\\
&=\sum_{a|m,\ b|n}f(a)f(b)g(\frac{m}{a})g(\frac{n}{b})\\
&=\Big[\sum_{a|m}f(a)g\Big(\frac{m}{a}\Big)\Big]\Big[\sum_{b|n}f(b)g\Big(\frac{n}{b}\Big)\Big]\\
&=h(m)h(n)
\end{aligned}$$

□

注：两个完全可乘的数论函数的狄利克雷乘积不一定是完全可乘的

定理 1.2.8. 若数论函数 f,g 满足若 g 和 $f*g$ 都是乘性的，则 f 也是乘性的

证明. 这里我们采用反证法，假设 f 不是乘性的，那么存在互素的正整数 m,n 使得 $f(mn)\neq f(m)f(n)$，我们取满足此式的最小的 mn。若 $mn=1$，则矛盾显然。若 $mn\neq 1$, 则我们有

$$\begin{aligned}
h(mn)&=\sum_{a|m,\ b|n,\ ab<mn}f(ab)g\Big(\frac{mn}{ab}\Big)+f(mn)g(1)\\
&=\Big[\sum_{a|m}f(a)g\Big(\frac{m}{a}\Big)\Big]\Big[\sum_{b|n}f(b)g\Big(\frac{n}{b}\Big)\Big]-f(m)f(n)+f(mn)\\
&=h(m)h(n)-f(m)f(n)+f(mn)
\end{aligned}$$

故得到矛盾，得证 □

根据上一定理以及 $g*g^{-1}=I$ 我们立即得到

定理 1.2.9. 若数论函数 f 是可乘的，则 f^{-1} 也是可乘的

至此，根据上述定理所得结果我们证明了 $\mathbb{A}$ 中的乘性函数集 $\mathbb{M}$ 构成了 $\mathbb{G}$ 的一个子群.

除此之外，我们还可以从 Dirichlet 级数角度给出另一种证明：

定理 1.2.10. *$\mathbb{A}$ 中的元素 f 是乘性函数的一个充分必要条件是它的形式 Dirichlet 级数可以展开成 Euler 乘积的形式：*

$$D(f;s)=\prod_p\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)$$

这个证明是容易的，此处略去

定理 1.2.11. *乘性函数集 $\mathbb{M}$ 是 $\mathbb{A}$ 的可逆元素群 $\mathbb{G}$ 的一个子群*

证明. 若 f,g 都是 $\mathbb{M}$ 中的元素，由形式计算可得

$$\begin{aligned}D(f;s)D(g;s)&=\prod_p\big(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\big)\big(1+\sum_{u\geqslant 1}\frac{g(p^u)}{p^{us}}\big)\\&=\prod_p\big(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{h(p^\nu)}{p^{\nu s}}\big)\end{aligned}$$

其中

$$h(p^\nu)=\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu}f(p^j)g(p^{\nu-j})$$

根据上一个定理的证明，可知 h 是可乘的，并且 h 和 $f*g$ 在素数的幂上的函数值相同。由于 T 是双射，故由 Dirichlet 级数的乘法定义知 $h=f*g$

另一方面对于 $f\in\mathbb{M}$, 只需证明 $f^{-1}\in\mathbb{M}$, 注意到：

$$\prod_p\big(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\big)\big(1+\sum_{u\geqslant 1}\frac{f^{-1}(p^u)}{p^{us}}\big)=1=D(f;s)D(f^{-1};s)$$

□

至此我们完成了 $\mathbb{A}$ 中的乘性函数集 $\mathbb{M}$ 构成了 $\mathbb{G}$ 的一个子群两种的证明。

eg. $\tau=u*u,\sigma=u*j$

eg. $\sigma_k(n)$ 是乘性函数

证明. 对任意的参数 k, 函数

$$\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d*k=(u*j^k)(n)$$

□

我们下面考虑 $\mathbb{A}$ 中的素元。注意到 $\mathbb{A}$ 中的元素 π 为素元当且仅当 π 不可逆并且可由 $\pi = u * v$ 推出 u 或 v 可逆。

定理 1.2.12. *若数论函数 f 满足 $f(1)=0$ 并且对于某一素数 p 有 $f(p)\neq 0$, 则 f 为 $\mathbb{A}$ 中的素元*

证明. 显然 f 是不可逆的。

若数论函数 u,v 满足 $f = u * v$，故

$$0 \neq f(p) = u(1)v(p) + u(p)v(1)$$

故必有 $u(1)\neq 0$ 或 $v(1)\neq 0$, 故 f 是素元 □

§1.3 *Möbius* 反转公式

注意到对任意素数 p 和任意整数 $v \geqslant 0$ 有

$$h * \mu(p^v) = I(p^v)$$

故我们可以得到

定理 1.3.1. $u * \mu = I$

下面我们基于上一定理可以得到 *Möbius* 反转公式：

定理 1.3.2. *(Möbius* **第一反转公式***) 设 f 和 g 均为数论函数，则下列两个命题等价：*

$$(i) \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad (n \geqslant 1)$$

$$(ii) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \qquad (n \geqslant 1)$$

证明. 条件 (i) 等价于 $g = f * u$, 而条件 (ii) 等价于 $f = g * \mu$ □

定理 1.3.3. *(Möbius* **第二反转公式***) 设 F 和 G 是在 $[1,+\infty)$ 上定义的函数，则以下两条件等价:*

$$(i)\ F(x) = \sum_{n \leqslant x} G\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad (x \geqslant 1)$$

$$(ii)\ G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) F\Big(\frac{x}{n}\Big) \qquad (x \geqslant 1)$$

证明. 我们只证明 $(i)\Rightarrow(ii)$，对 $x\geqslant 1$, 有：

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)F\Big(\frac{x}{n}\Big)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}G\Big(\frac{x}{mn}\Big)=\sum_{k\leqslant x}G\Big(\frac{x}{k}\Big)\sum_{m|k}\mu(m)$$

□

eg. 在上一定理中令 $G(x)\equiv 1$, 即可得到

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\lfloor\frac{x}{n}\rfloor=1\qquad(x\geqslant 1)$$

进而我们可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}=0$$

在后面我们可以说明这个结论与素数定理等价

§1.4 *Mangoldt* 函数

我们习惯上用 Λ 表示数论函数

$$\Lambda=\mu*\log$$

称为 Mangoldt 函数，对任意正整数 n,

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\log\Big(\frac{n}{d}\Big)=I(n)\log n-\sum_{d|n}\mu(d)\log(d)=-\sum_{d|n}\mu(d)\log(d)$$

故 $\Lambda=-\mu\log*u$

故对于任意的互素的正整数 m,n，有

$$\Lambda(mn)=I(n)\Lambda(m)+I(m)\Lambda(n)$$

根据上面的描述我们可以得到，这个定义和之前是等价的。

第二章 求和公式与$Bernoulli$数

§2.1 求和公式

定理 2.1.1. *(Abel 求和公式)*$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个复数列，故对任意的正整数 M,N, 有

$$\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n = S_{M+N} b_{N+M+1} + \sum_{N<n\leqslant N+M} S_N(n_n - n_{n-1})$$

定理 2.1.2. 对与任意函数 $f\in C^1([1,x])$ 有

$$\sum_{1<n\leqslant x} a_n f(n) = S(x)f(x) - \int_1^x S(x)f'(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $S(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$

这两个命题的证明比较简单在这里略去

定理 2.1.3. *(求和与积分的比较)* 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的单调实值函数，$a,b\in\mathbb{Z}$，故存在 $\theta\in[0,1]$，使得

$$\sum_{a\leq n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \theta(f(b)-f(a))$$

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq n\leq b} f(n) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}\lfloor t\rfloor - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b f(t)\mathrm{d}\{t\} \\ &= \int_a^b \{t\}\mathrm{d}f(t) - [f(t)\{t\}]\Big|_{t=a}^b\end{aligned}$$

由于 f 是单调的，故由中值定理知

$$\sum_{a\leq n\leq b} f(n) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \theta\int_a^b \mathrm{d}f(t) = \theta(f(b)-f(a)), \qquad \theta\in[0,1]$$

□

eg. $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k = n\log n - n + 1 + \theta \log n$

定理 2.1.4. *(Euler-Maclaurin* **公式***)* 设 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$，则对任意的 $f \in C^1([a,b])$ 有：

$$\sum_{a<n\leqslant n} f(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)\psi(t)\mathrm{d}t + f(t)\psi(t) - f(b)\psi(b)$$

其中 $\psi(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$

证明. 定理 2.1.2中令 $a_n \equiv 1$，带入后化简即可 □

§2.2 Bernoulli 数

考虑多项式序列 $\{b_r(x)\}$, 满足 $b_0(x) \equiv 1$, $b_r'(x) = r b_{r-1}(x)$, $\int_a^b b_r(x)\mathrm{d}x = 0, (r \geqslant 1)$. 一方面对于关于 y 的幂级数 $\sum_{r=0}^{+\infty} b_r(x)\frac{y^r}{r!} := f(x,y)$, 有:

$$\sum_{r=0}^{+\infty} b_r(x)\frac{y^r}{r!} = \sum_{r=0}^{+\infty} b_{r+1}'(x)\frac{y^r}{(r+1)!} = \frac{1}{y}\sum_{r=1}^{+\infty} b_r'(x)\frac{y^r}{r!} = \frac{1}{y}\sum_{r=0}^{+\infty} b_r'(x)\frac{y^r}{r!}$$

根据幂级数的一致收敛性，故

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

，解得

$$f(x,y) = g(y)e^{xy}$$

. 根据条件以及一致收敛性我们可知对任意的 x 有

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = 1$$

，带入后解出

$$g(y) = \frac{y}{e^y - 1}$$

, 故

$$f(x,y) = \frac{ye^{xy}}{e^y - 1}$$

因此我们对 f 按照 y 做 Taylor 展开便可以得到 $\{b_r(x)\}$ 的具体表达式，对 $b_r(x)$ 做周期为 1 的延拓定义为 Bernoulli 函数 $B_r(x)$，我们可得 $b_1(x) = x - \frac{1}{2}$, 故 $B_1(x) = \psi(x)$.

记 $B_r = B_r(0)$ 称为第 r 个 Bernoulli 数，即 B_r 为 $\frac{y}{e^y - 1}$ 在 0 附近的 Laurent 展开的 r 次方项系数，故我们注意到有 $B_{2r+1} = 0$

故代入定理2.1.3中, 并使用分部积分公式，可得到：

定理 2.2.1. 对任意的正整数 k, 以及整数 a,b，$f\in C^{k+1}([a,b])$，有:

$$\sum_{a\le n\le b} f(n)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}}{(r+1)!}\Big(f^{(r)}(b)-f^{(r)}(a)\Big)+\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)f(k+1)(t)\mathrm{d}t$$

eg. 令 $f(x)=\frac{1}{x}, a=1, b=n, k=3$, 注意到 $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}$，故:

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{m}=\log n+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-1)+\frac{1}{12}(1-\frac{1}{n^2})+\frac{1}{120}(\frac{1}{n^4}-1)-\int_1^n t^5B_4(t)\mathrm{d}t$$

两边令 $n\to\infty$, 并加入相应的 $m=1$ 的部分，得

$$\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{120}-\int_1^{+\infty}t^5B_4(t)\mathrm{d}t$$

可求得 $b_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$, 故 $|B_4(x)|<\frac{1}{30}$ 故我们有

$$\sum_{2\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{m}=\log n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{\theta(n)}{60n^4}$$

其中 $\theta(n)\in[0,1]$

第三章 *Dirichlet*级数

设 f 是数论函数，在本章内容中 $F(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ 为关于数论函数 f 的 Dirichlet 级数。

在后面我们将复数 s 记为 $s = \sigma + i\tau$

$P^+(n)$ 表示 n 的最大素因子

$f(x) \ll g(x)$ 表示存在绝对常数 C 使得 $Cg(x) \geq f(x)$, $f(x) \ll_\epsilon g(x)$ 则表示常数 $C = C(\epsilon)$ 与 ϵ 有关

§3.1 卷积与 *Dirichlet* 级数

定理 3.1.1. 设 f, g, h 为数论函数，其 *Dirichlet* 级数为 F, G, H, 假设 $h = f * g$, 则级数 H 在 F 和 G 的公共绝对收敛域上收敛, 并且有 $H(s) = F(s)G(s)$

证明. 设 F 和 G 在 s 处绝对收敛, 则对任意的 $x \geq 1$ 有：

$$\sum_{n\leq x}\left|\frac{h(n)}{n^s}\right| = \sum_{md\leq x}\left|\frac{f(m)g(d)}{m^s d^s}\right| \leq \sum_{m\leq x}\left|\frac{f(m)}{m^s}\right|\sum_{d\leq x}\left|\frac{g(d)}{d^s}\right|$$

故 $H(s)$ 在 s 处收敛，另一方面：

$$\sum_{m\leq x}\left|\frac{f(m)}{m^s}\right|\sum_{d\leq x}\left|\frac{g(d)}{d^s}\right| \leq \sum_{md\leq x^2}\left|\frac{f(m)g(d)}{m^s d^s}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\left|\frac{h(n)}{n^s}\right|,$$

令 $x \to \infty$ 即得到结论 □

定理 3.1.2. 设 f 是积性函数，s 是复数，在条件 $\sum_p \sum_{\nu\geq 1}\left|\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right| < \infty$ 条件下，f 的 *Dirichlet* 级数收敛并且 $F(s) = \prod_p \sum_{\nu\geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}$

证明. 由条件知 $\prod_p \left(1 + \sum_{\nu\geq 1} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)$ 是收敛的，设极限为 M，其次对于 $x \geq 1$ 有

$$\sum_{n\leq x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{P^+(n)\leq x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \prod_{p\leq x}\left(1 + \sum_{\nu\geq 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right) \leq M$$

故 $F(s)$ 是绝对收敛的并且

$$\left|\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^s}-\prod_{p\leq x}\sum_{\nu\geq 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right|=\sum_{P^+(n)\geq x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n\geq x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$$

□

§3.2 收敛坐标

σ_c :=inf $\{\sigma\in\mathbb{R}$, 对每个任意给定的 $\tau\in\mathbb{R}, F(\sigma+i\tau)$ 收敛 $\}$

σ_a :=inf $\{\sigma\in\mathbb{R}$, 对每个任意给定的 $\tau\in\mathbb{R}, F(\sigma+i\tau)$ 绝对收敛 $\}$

σ_c 称为**收敛坐标**,σ_a 称为**绝对收敛坐标**

下面的定理说明 σ_c 与 σ_a 并不具有独立性

定理 3.2.1. 设 $F(s)$ 为 *Dirichlet* 级数，则有 $\sigma_c\leq\sigma_a\leq\sigma_c+1$

证明. 根据定义知，$\forall\epsilon>0$, 可知 $F(\sigma_c+\epsilon)$ 是收敛的，故 $f(n)\ll_\epsilon n^{\sigma_c+\epsilon}$，故 $F(s)$ 在 $\sigma>\sigma_c+1+2\epsilon$ 上绝对收敛，故 $\sigma_a\leq\sigma_c+1+2\epsilon$，令 $\epsilon\to 0$ 则得 $\sigma_c\leq\sigma_a\leq\sigma_c+1$ □

定理 3.2.2. 设 $F(s)$ 为 *Dirichlet* 级数，其收敛坐标为 σ_c, 令 $\sigma_0>\sigma_c$,$\epsilon>0$，则对 $\sigma_0\leq\sigma\leq\sigma_c+1$, 一致地有 $F(s)\ll|\tau|^{1+(\sigma-\sigma_c)+\epsilon}\quad(|\tau|\geq 1)$

证明. 不妨设 $0<\epsilon<\sigma_0-\sigma_c$, 令 $H(t)=\sum_{n\leq t}\frac{f(n)}{n^{\sigma_c+\epsilon}}$，显然 $t\to\infty$ 时，有 $H(t)=F(\sigma_c+\epsilon)+o(1)$

另一方面，根据分部求和 (Abel) 公式得

$$F(s)=\sum_{n\leq x}\frac{f(n)}{n^s}+\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{s-\sigma_c}-\epsilon}\mathrm{d}H(t)$$

再使用分部积分公式结合 $f(n)\ll_\epsilon n^{\sigma_c+\epsilon}$ 可得

$$\begin{aligned}F(s)&\ll\sum_{n\leq x}n^{\sigma_c-\sigma+\epsilon}+\frac{H(x)}{x^{\sigma-\sigma_c-\epsilon}}+|s-\sigma_c-\epsilon|\int_x^{+\infty}\frac{|H(t)|}{t^{1+\sigma+\sigma_c-\epsilon}}\mathrm{d}t\\&\ll x^{1+\sigma_c-\sigma+\epsilon}+|s|x^{\sigma_c-\sigma+\epsilon}\end{aligned}$$

取 $x=1+|\tau|$ 即得到定理 □

第四章 Γ函数

§4.1 Γ 函数的定义

Γ 函数有很多种定义，常见的定义方法见下：

$$\Gamma(s) := \frac{1}{s}\prod_{n\leq 1}\frac{(1+\frac{1}{s})^s}{1+\frac{s}{n}} \qquad (1)$$

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \ (\sigma > 1) \quad (2)$$

我们将说明上述两种定义是等价的。我们先证明上述定义是良定义的,(2) 式显然是良定义的，对于 (1) 式，我们考虑连成绩中的通项：注意到：

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{(1+\frac{1}{s})^s}{1+\frac{s}{n}}\right| &= \left|s\log(1+\frac{1}{n}) - \log(1+\frac{s}{n})\right| \\ &= \left|s\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+O(\frac{1}{n^3})\right)-\left(\frac{s}{n}-\frac{s^2}{n^2}+O(\frac{1}{n^3})\right)\right| \\ &= O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

由 Weierstrass 判别法知 (1) 式是良定义的。

定理 4.1.1. *(Euler)* 令 $\Gamma_n(s) = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\mathrm{d}t \quad (\sigma > 0)$, 则我们有

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)...(s+n)}$$

, 并且

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (\sigma > 0)$$

证明. 令 $u = \frac{t}{n}$, 得

$$\Gamma_n(s) = n^s\int_0^1(1-u)^n u^{s-1}\mathrm{d}u, \quad (\sigma > 0)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-u)^n u^{s-1}\mathrm{d}u &= \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{d}\frac{u^s}{s}\\
&= \frac{(1-u)^n u^s}{s}\Big|_{u=0}^1 + \frac{n}{s}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^s\mathrm{d}u\\
&= \frac{n(n-1)}{s(s+1)}\int_0^1 (1-u)^{n+1}u^{s-2}\mathrm{d}u\\
&= \dots\dots\\
&= \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)}\int_0^1 u^{s+n+1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}
\end{aligned}$$

故

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \frac{1}{s}(1+\frac{1}{n})^{-s}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1+\frac{1}{j})^s}{1+\frac{j}{s}}$$

另一方面 $(1-\frac{t}{n})^n$ 关于 n 是单调递增的，故根据单调收敛定理可知

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s)$$

□

这一定理便给出了两种定义的等价性。

引理 4.1.1. *函数 Γ 在 $\mathbb{R}^{+*}$ 上是对数凸的*

证明. 利用含参变量积分以及柯西不等式直接得到，直接使用函数方程进行验证也可 □

对数凸性是表现在函数图像上的另一种凸性，他某种程度上构建了函数的各阶导数之间形成的凸性。

§4.2 Artin 引理

下面的定理便是阿廷引理，这个定理的优势在与给出了 Γ 函数与函数方程之间的唯一确定关系，常被用来作为判定一个函数是 Γ 函数的判据，在后定理的证明中也反复使用：

定理 4.2.1. *(Artin) 设 $\Phi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微，Φ 是对数凸的，且满足函数方程 $x\Phi(x)=\Phi(x+1),\forall x>0$，则对任意的 $x>0$ 有 $\Phi(x)=\Phi(1)\Gamma(x)$*

证明. (Tenenbaum) 设 $H(x) := \dfrac{\Phi(x)}{\Gamma(x)}$, 由他们满足的函数方程知，$H(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

根据上面的引理，已知 $\Phi(x)$ 和 $\Gamma(x)$ 均为对数凸函数，故 $\dfrac{\Phi'}{\Phi}$ 和 $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ 均为单调递增函数. 求导得 $\dfrac{H'}{H} = \dfrac{\Phi'}{\Phi} - \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$. 故对于 $\forall x \geqslant 0, n \geqslant 0$, 有

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leqslant \frac{H'(n+x)}{H(n+x)} \leqslant \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

另一方面由递推式得 Γ 和 Φ 均为 $f'(x+1) = f(x) + xf'(x)$ 的解，故也为

$$\frac{f'(x+1)}{f(x+1)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{x}$$

的解, 故

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n}, \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{1}{n}$$

, 故在不等式估计中令 $n \to \infty$ 可得 $\dfrac{H'}{H}$ 是常数，又由于 $H(x)$ 为周期函数，故 $H(x)$ 为常函数，得证 □

eg. *(Tenenbaum)* 利用阿廷引理证明：$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} (x, y > 0)$

证明. 设 $f(x) = \dfrac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$，之后逐一验证阿廷引理的条件即可，略 □

定理4.2.1的条件实质上是比较强的（比如可微，对数凸）, 在一般的抽象函数中我们很难去验证着两个条件，下一定理是定理4.2.1的强化版本，故在证明过程中采取的手法也不尽相同。

定理 4.2.2. *(Bohr-Mollerup)* 设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为凸函数，使得 $\phi(0) = 1, \phi(x+1) = \phi(x) + \log x (x > 0)$, 试证明这样的 ϕ 唯一确定并且满足 *Gauss* 公式：

$$e^{\phi(x)} = \lim_{n\to\infty} n! n^x \prod_{j=0}^{n} (j+x)^{-1} \quad (x > 0)$$

证明. (Tenenbaum) 定义函数 $\psi_n(x) := \dfrac{\phi(n+1+x) - \phi(n+1)}{x}$, 显然函数 $\psi_n(x)$ 在 $[-1,1] \setminus \{0\}$ 上是单调递增的. 故

$$\log n \leqslant \chi_n(x) \leqslant \log(n+1) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

故

$$x \log n \leqslant \phi(n+1+x) - \log(n!) \leqslant x \log(n+1)$$

注意到

$$\phi(n+1+x)=\phi(x)+\sum_{k=0}^{n}\log(x+k)$$

故

$$\log(n!)+x\log n-\sum_{k=0}^{n}\log(x+k)\leqslant\phi(x)\leqslant\log(n!)+x\log(n+1)-\sum_{k=0}^{n}\log(x+k)$$

得到不等式

$$0\leqslant\phi(x)-\log\left(\frac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(j+x)}\right)\leqslant x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

显然在上一不等式中令 $n\to\infty$，故对于每一个 x，$\psi(x)$ 的值均可确定，故这样的 ϕ 是唯一的 □

比较两定理的证明过程，不难看出定理4.2.1的证明过程是以函数方程为核心的证明手法，并没有涉及到 Γ 函数的本质，而定理4.2.2通过一个更弱的条件，给出了函数的唯一存在性，是一种更加精妙的证明方式，

下面给出的 Legendre 加倍公式是在后续计算中经常会用到的计算式，其证明也是使用了阿廷引理：

定理 4.2.3. *(Legendre 加倍公式)* 对 $x>0$, 有 $\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})=\sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x)$

证明. (Tenenbaum) 设 $f(x)=\dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\dfrac{x}{2})\Gamma(\dfrac{x+1}{2})$ 直接进行验证可得 $f(x)$ 是对数凸的，利用函数方程可知 $f(x)$ 也满足函数方程，故由阿廷引理得证 □

§4.3 Weierstrass 公式

下面给出最常用的一个等式

定理 4.3.1. *(Weierstrass)* 对 $\sigma>0$ 有 $\dfrac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{j\geqslant1}\left[(1+\dfrac{s}{j})e^{-\frac{s}{j}}\right]$, 其中 γ 为欧拉常数，并且根据上式我们可以将 $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ 延拓为复平面上的整函数

证明. (Tenenbaum) 首先上式是良定义的，利用 Taylor 展开便可知右式的无穷乘积收敛. 令 $H_n:=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

由定理4.1.1得

$$\begin{aligned}\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(s) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{s\log n}}{s}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{e^{-\frac{s}{j}}e^{\frac{s}{j}}}{1+\frac{s}{j}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{s(\log n-H_n)}}{s}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{e^{\frac{s}{j}}}{1+\frac{s}{j}}\\ &= \frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{j}\frac{e^{\frac{s}{j}}}{1+\frac{s}{j}}\end{aligned}$$

□

个人认为Weierstrass等式具有很重要的意义：根据定理4.1.1我们知道，两种Γ函数的定义域实际上只有右半平面，左半平面上的函数值以及性质未知，并且会产生很多的奇点. 整函数在计算时极大地提高了方便程度。

§4.4 Stiring 公式

通过函数方程为我们很容易得到 $\Gamma(n)=(n-1)!$，故我们把Γ函数看成是阶乘的一个连续延拓，在分析中与结成密切相关的便是Stiring公式，那么我们可不可以以正整数形式的Stiring公式为基础进行推广，推广成与Γ函数相关的形式呢？下面的两个结论给出了可行性：

第一个结论实质上就是在大一的数学分析中学到的Stiring公式，但是关于余项的估计是在Stiring公式的学习中没有涉及到的。

引理 4.4.1. n 是自然数，$\log\Gamma(n)=(n-\frac{1}{2})\log n-n+c+O\left(\frac{1}{n}\right)$, 其中 c 为常数

证明. (卡拉楚巴) 直接对 $log\ x$ 使用Euler-Maclaurin公式以及Taylor展开化简得到上式注意到 $log\Gamma(n)=\sum_{k=1}^{n-1}log\ k$

由Euler-Maclaurin公式得：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\log k &= \sum_{k=1}^{n}\log k-\log n\\ &= \int_1^n \log t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\log(n)-\int_1^n B_1(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-\log n\\ &= (n-\frac{1}{2})\log n-n-\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^1\frac{t-\frac{1}{2}}{t+j}\,\mathrm{d}t\\ &= (n-\frac{1}{2})\log n-n-\sum_{j=1}^{n-1}\left[1-(j+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{j})\right]\end{aligned}$$

注意到存在与 j 无关的正常数 M，使得 $1-(j+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{j})<M\frac{1}{j^2}$ 对任意的正整数 j 成立，故存在常数 c 使得:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[1-(j+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{j})\right]=c+O\big(\frac{1}{n}\big)$$

$\square$

定理 4.4.1. *对于 $s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ 有，$\log\Gamma(s)=(s-\frac{1}{2})\log s-s+c+\int_0^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t+s}\mathrm{d}t$, 其中 c 即为引理4.4.1中的常数，并且 $c=\log\sqrt{2\pi}$*

证明. (卡拉楚巴) 我们可以利用与引理4.4.1一样的方法对 $log\ (t+s)$ 使用 Euler-Maclaurin 公式进行估计, 可得：

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\log(n+s)=\left(s+N+\frac{1}{2}\right)\log(s+N)-N-(s+\frac{1}{2})\log s+\int_0^N\frac{B_1(t)}{t+s}\mathrm{d}t$$

与引理4.4.1中的式子相减得：

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\log(1+\frac{s}{n})=s(1+\log N)-(s+\frac{1}{2})\log s-c+\int_0^N\frac{B_1(t)}{t+s}\mathrm{d}t+o(1)$$

另一方面由 Weierstrass 公式得；

$$\log\Gamma_n(s)=\log s+s\gamma-\sum_{n=1}^{N}\frac{s}{n}+\sum_{n=1}^{N}\log(1+\frac{s}{n})$$

上面两式联立，并令 $N\to\infty$，得

$$\log\Gamma(s)=(s-\frac{1}{2})\log s-s+c+\int_0^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t+s}\mathrm{d}t$$

在上式中取 $s=n,n+\frac{1}{2},2n$, 利用加倍公式，再令 $n\to\infty$, 可得 $c=\log\sqrt{2\pi}$ $\square$

定理 4.4.2. *(互补公式) 对 $s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 有 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$*

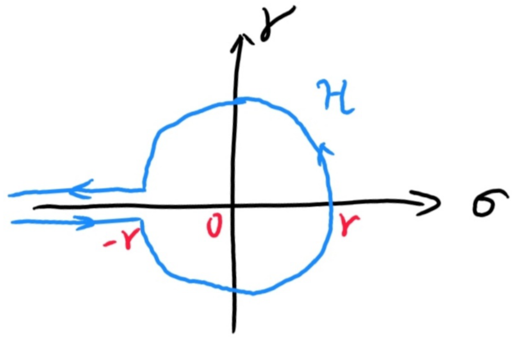
证明略去

§4.5 Hankel 公式

上面所描述的内容不需要多么复杂的理论背景，有着初等的分析知识便可以推出，下面我们考虑用复变函数围道积分来研究 Γ 函数.

做一有向曲线 $\gamma_n^{(\epsilon)}$: 沿负实轴下沿从 $-n$ 到 $-\epsilon$(n 为充分大的正整数，ϵ 为充分小的正数)，再以原点为圆心，ϵ 为半径的圆周 C_ϵ 逆时针环绕一圈，最后再

沿负实轴上沿从 $-\epsilon$ 到 $-n$ 为止。当 $n\to\infty$ 时，这样的围道称为 Hankel 轨道，记为 $\mathscr{H}$。对于如图所示的 Hankel 轨道，我们称为参数为 r 的 Hankel 轨道，记为 $\mathscr{H}_r$. 同样的将这个轨道绕原点顺时针旋转 π 得到的围道也称为 Hankel 轨道，通常记为 $\mathscr{C}_\rho$，其中 ρ 为参数



定理 4.5.1. *(Hankel)* 对于任意复数 z，有 $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathscr{H}} s^{-z}e^s\mathrm{d}s$

证明. (Tenenbaum) 我们先证明右式的积分是良定义的：考虑

$$\psi_n(z)=\int_{\gamma_n^{(\epsilon)}} s^{-z}e^s\mathrm{d}s$$

, 由于函数 $s^{-z}e^s$ 在全平面解析，故积分值与 ϵ 的选取无关.

我们注意到当 $|z|<R$ 时有

$$|\psi_{n+p}(z)-\psi_n(z)|<2e^{\pi R}\int_n^{n+p} e^{-t}t^R\mathrm{d}t$$

, 而

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^R\mathrm{d}t$$

是收敛的，并且这个收敛对于 $|z|\leqslant R$ 是一致的, 又由于 $\psi_n(z)$ 是整函数，故 $\{\psi_n(z)\}$ 在全平面中是内闭一致收敛的. 设极限函数为 $\psi(z)$, 故

$$\psi(z)=\int_{\mathscr{H}} s^{-z}e^s\mathrm{d}s$$

, 且为整函数。

不难发现 $\lim\limits_{\epsilon\to0}\displaystyle\int_{C_\epsilon} s^{-z}e^s\mathrm{d}s=0$, 另一方面可以计算得到

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathscr{H}-C_\epsilon} s^{-z}e^s\mathrm{d}s=\frac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(1-z)=\frac{1}{\Gamma(z)}$$

□

Hankel 轨道上的围道积分的方法在后续学习中仍然会反复使用。

第五章 $Riemann\zeta$函数

先给出 Riemann ζ 函数的定义:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$$

§5.1　$\zeta(s)$ 函数的函数方程与亚纯延拓 I

根据定义的内容很容易得到定理5.1.1：

定理 5.1.1. *$\zeta(s)$ 在平面 $\sigma>1$ 上收敛解析*

下面引入 θ 函数：$\theta(s)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 s}$. 利用 Poisson 求和公式可知 $\theta(x)=x^{-\frac{1}{2}}\theta(\frac{1}{x})$　　(*)

定理 5.1.2. *若 $\sigma>1$, 则 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\dfrac{s}{2})\zeta(s)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\big(\theta(u)-1\big)\mathrm{d}u$*

证明. (Stein) $\Gamma(\frac{s}{2})=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{\frac{s}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t$，

令 $t=n^2\pi u$ 带入得 $\Gamma(\dfrac{s}{2})=n^s\pi^{\frac{s}{2}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-n^2\pi u}u^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}u$，式子两边同时对 n 求和，得

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-n^2\pi u}u^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}u$$

设 $f_n(u)=\sum\limits_{m=1}^{n}e^{-m^2\pi u}u^{\frac{s}{2}-1}$, 显然，对于 $\forall s\in\mathbb{C}$，通过分段讨论知，存在 $\mathbb{R}$ 上可积函数 $g(u)$, 使得 $|f_n(u)|<g(u)$, 故由控制收敛原理得

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-n^2\pi u}u^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi u}\right)u^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\big(\theta(u)-1\big)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

□

我们将定理5.1.2中等式左边的函数记为 $\Phi(s)$, 即 $\Phi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$，下一个定理便给出了 $\Phi(s)$ 的性质：

定理 5.1.3. *$\Phi(s)$ 在 $\sigma>1$ 上解析并且可以在 $\mathbb{C}$ 上延拓为以 $s=0$ 和 $s=1$ 为一阶极点的亚纯函数，并且有 $\Phi(s)=\Phi(1-s), s\in\mathbb{C}$*

证明. (Stein) $\Phi(s)$ 在 $\sigma>1$ 上解析是显然的，根据定理5.1.2可得

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\big(\theta(u)-1\big)\mathrm{d}u$$

令 $v=\frac{1}{u}$, 记 $\Psi(u)=\frac{1}{2}(\theta(u)-1)$, 故 $\Psi(u)=u^{-\frac{1}{2}}\Psi(\frac{1}{u})+\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{2}$，代入上式得：

$$\begin{aligned}
\Phi(s)&=\int_0^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\Psi(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{1}u^{\frac{s}{2}-1}\Psi(u)\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\Psi(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{1}u^{\frac{s}{2}-1}\big(u^{-\frac{1}{2}}\Psi(\frac{1}{u})+\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{2}\big)\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\Psi(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_1^{+\infty}u^{1-\frac{s}{2}}\big(u^{\frac{1}{2}}\Psi(u)+\frac{\sqrt{u}}{2}-\frac{1}{2}\big)\mathrm{d}(\frac{1}{u})+\int_1^{+\infty}u^{\frac{s}{2}-1}\Psi(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_1^{+\infty}\Psi(u)(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+u^{\frac{s}{2}-1})\mathrm{d}u+\frac{1}{(s-1)s}
\end{aligned}$$

根据上式易知右式的形式关于 $s=\frac{1}{2}$ 中心对称的，即 $\Phi(s)=\Phi(1-s)$. 使用控制收敛原理，我们可知上式的反常积分对于 $\forall s\in\mathbb{C}$ 收敛，上式右端的定义域是 $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 并且 0 和 1 都是一阶极点。故我们可以按照右式进行亚纯延拓。 □

另外根据互补公式，我们可以给出 ζ 函数的另一种表示形式

$$\zeta(s)=\pi^{s-1}2^s\,\sin\frac{\pi z}{2}\,\zeta(1-s)$$

我们依据 $\Phi(s)$ 的定义式以及上面所述的函数方程便可以对 $\zeta(s)$ 进行延拓了

定理 5.1.4. *Riemann $\zeta(s)$ 在全平面上可以延拓为亚纯函数，惟一的奇点是 $s=1$ 的一阶极点，并且 $s=1$ 的留数为 1*

证明. (Stein) 由定义知 $\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\dfrac{\Phi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}$，由 Weierstrass 公式知 $\dfrac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ 是整函数，零点为 0，-2，-4... 并且为一阶。又由于 $\Phi(s)$ 以 $s=0$ 和 $s=1$ 为一阶极点，故 $\zeta(s)$ 的唯一奇点是 $s=1$ 的一阶极点，留数的计算直接利用定理5.1.3中 $\Phi(s)$ 的表达式即可 □

§5.2 $\zeta(s)$ 函数的函数方程与亚纯延拓 II

我们也可以直接使用 Hankel 轨道进行延拓

定理 5.2.1. *Riemann $\zeta(s)$ 在全平面上可以延拓为亚纯函数，惟一的奇点是 $s=1$ 的一阶极点，并且 $s=1$ 的留数为 1*

证明. (Tenenbaum) 对 Γ 函数的定义做积分换元可得

$$\Gamma(s)n^{-s}=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-nt}\mathrm{d}t \qquad (\sigma>0)$$

对 n 求和，可得对 $\sigma>1$(否则无一致收敛性) 有：

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\sum_1^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-nt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$$

记 $f(z)=\dfrac{z^{s-1}}{e^z-1}$，故 $f(z)$ 在除去正半轴的带域 $|\mathrm{Im}\, z|<2\pi$ 上解析, 记

$$I(s):=\int_{C_\rho}f(z)\mathrm{d}z$$

并且这个积分与参数 $\rho\in[0,2\pi]$ 的选取无关，并且对于 $\forall s\in\mathbb{C}$ 是绝对收敛的，并且在任意紧集上一致收敛，故 $I(s)$ 为关于 s 的整函数，注意到：

$$I(s)=\int_{|z|=\rho}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\mathrm{d}z+(e^{2\pi is-1}-1)\int_\rho^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$$

注意到

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\right|<C(s)\rho^{\sigma-2} \qquad (|z|=\rho<\pi)$$

其中 $C(s)$ 是只与 s 有关的常数，故令 $\rho\to\infty$, 得

$$I(s)=(e^{2\pi is-1}-1)\Gamma(s)\zeta(s) \qquad (\sigma>1)$$

根据互补公式，我们可以得到

$$\zeta(s)=\frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i}\Gamma(1-s)\zeta(s)$$

我们注意到上式原本只对 $\sigma>1$ 上成立，故我们已给出了 $\zeta(s)$ 的延拓形式 □

§5.3 $\zeta(s)$ 函数的有限和估计

上述定理在利用了 θ 函数的情况下给出了 $\Phi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 的亚纯延拓。之前有关 Γ 函数的部分主要研究的是这些函数的解析性质以及阶的估计，后面的定理主要以 ζ 函数的计算为主，进而研究 ζ 函数的零点个数以及分布问题

定理 5.3.1. 对于 $x \geqslant 1,\sigma \geqslant 0$ 有：$\zeta(s) = \sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{x^s}+\frac{x^{1-s}}{s-1}+s\int_x^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$

证明. (Apostol) 对 $f(x)=\frac{1}{n^s}(\sigma>1)$ 使用 Euler-Maclaurin 求和公式得：

$$\sum_{y<n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\int_y^x\frac{\mathrm{d}t}{t^s}-s\int_y^x\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \qquad (\sigma>1)$$

在上式中，令 $x\to+\infty$ 取 $y=x$，化简得

$$\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{s-1}-s\int_x^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \qquad (\sigma>1) \qquad (**)$$

注意到上式右式在 $\sigma>0$ 上都是良定义的，而根据解析延拓，我们可以延拓到 $\sigma>0$

□

而显然 x 充分大时，有 $\left|s\int_x^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t\right|=O(|s|x^{-\sigma})$, 而在学习了其他知识后余项的估计可以加强为 $O(x^{-\sigma})$

定理 5.3.2. 对 $0<\alpha<1$ 有，

$$|\zeta(s)|\leqslant\frac{3|\tau|^{1-\alpha}}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad (\sigma\geqslant\alpha,|\tau|\geqslant1),$$

特别的，对于任意正常数 c，有 $\zeta(s)\ll log|\tau|, \qquad (|\tau|\geqslant 2,\sigma\geqslant 1-c/ln|\tau|)$

证明. (Tenenbaum) 定理5.3.1中的证明过程 (**) 式知

$$\Big|\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}\Big|<\Big|\frac{x^{1-s}}{s-1}\Big|+\Big|s\int_x^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t\Big|$$

由于

$$\{x\}\leqslant\frac{1}{2}\chi_{\{t\}<\frac{1}{2}}(x)+\chi_{\{t\}\geqslant\frac{1}{2}}(x)$$

故我们得到

$$\Big|\sum_{n>x}\frac{1}{n^s}\Big|\leqslant\frac{x^{1-s}}{|\tau|}+\frac{1}{2x^\sigma}+\frac{|s|}{2\sigma x^\sigma}$$

另一方面 $\Big|\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}\Big|<\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, 故

$$|\zeta(s)|\leqslant x^{1-\sigma}\left(\frac{1}{1-\sigma}+\frac{1}{|\tau|}+\frac{1}{x}+\frac{|\tau|}{2\alpha x}\right)$$

, 令 $x=\lfloor|\tau|\rfloor$，由于 $\sigma\geqslant\alpha,|\tau|\geqslant1$ 故化简得到

$$|\zeta(s)|\leqslant\frac{|\tau|^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}(\alpha+\alpha(1-\alpha)+(1+\alpha)(1-\alpha))$$

, 故

$$|\zeta(s)| < \frac{3|\tau|^{1-\alpha}}{2\alpha(1-\alpha)}$$

得到所证明结论 □

§5.4 ζ(s) 函数的零点分布 I

在这一节中我们利用最基础的变形技巧探究最基本的零点有关的性质

定理 5.4.1. $\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上无零点

证明. (Tenenbaum) 根据述 $Riemann\,\zeta$ 函数函数的令一种形式

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (\sigma>0)$$

, 故 $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \prod_p \left|1-p^{-s}\right| \leqslant \prod_p \left|1+p^{-\sigma}\right| < \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\sigma} < 1+\frac{1}{\sigma-1}$ □

定理 5.4.2. *(Mertens)* 设 $F(s):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ 是非负系数的 *Dirichlet* 级数，收敛半径为 σ_c, 则有 $3F(\sigma)+4Re\,F(\sigma+i\tau)+Re\,F(\sigma+2i\tau)\geqslant 0$ $(\sigma>\sigma_c)$

证明. (Tenenbaum) 设 $v(\theta)=3+4\cos\theta+\cos 2\theta$, 故 $v(\theta)\geqslant 0$, 后面直接验证即可 □

定理 5.4.3. $\zeta^3(\sigma)\left|\zeta^4(\sigma+i\tau)\right|\left|\zeta(\sigma+2i\tau)\right|\geqslant 1$

证明. (Tenenbaum) 由于

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{p^{ks}k} = \sum_p\sum_{k\geqslant 1}\frac{\log p}{p^{ks}\,k\log p} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s\,\log n}$$

故 $log\,\zeta(s)$ 是非负系数的 Dirichlet 级数，由 Mertens 得证 □

定理 5.4.4. 函数 $\zeta(s)$ 在平面 $\sigma\geqslant 1$ 中没有任何原点

证明. (Apostol) 由定理5.4.3知 $\Big(\zeta(\sigma)(\sigma-1)\Big)^3\left|\frac{\zeta(\sigma+i\tau)}{\sigma-1}\right|^4\left|\zeta(\sigma+2i\tau)\right|\geqslant\frac{1}{\sigma-1}$

由于 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的一级极点并且 $Res_{s=1}\zeta(s)=1$ 假设 $\zeta(1+it)=0$, 令 $\sigma\to 1^+$, 可得 $\left|\zeta'(1+it)\right|^4\left|\zeta(1+2it)\right|\geqslant+\infty$，显然 $t\neq 0$, 矛盾！ □

定理 5.4.5. 在左半平面 $\sigma\leqslant 0$ 上，函数 $\zeta(s)$ 的零点只有负偶数，并且他们是一级零点

证明. (Tenenbaum) 利用 $\Phi(s)$ 的函数方程可以得到 $\zeta(s)=\pi^{s-1}2^s\sin\frac{\pi z}{2}\zeta(1-s)$ □

上面两个定理中所描述的零点称为 $\zeta(s)$ 的显然零点。

§5.5 复分析工具

之前的几个定理所使用的也是简单的技巧，并没有涉及过多分析的内容，故所得到的结论略微粗糙。下面我们介绍几个在数论中常用到的复分析定理，将使用这几个定理为工具对更加深入的问题做更加细致的分析和估计。

定理 5.5.1. *(Jensen 公式) 设 $F(s)\in H(\overline{B(O,R)})$, 并且 $F(0)=1$, 记 $n(r)$ 是 $F(s)$ 在 $\overline{B(O,r)}$ 中的零点个数（按重数计算），则：*

$$\int_0^R\frac{n(r)}{r}\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|F(Re^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$$

证明. 若 $n(R)=0$, 则 $\log|F(s)|\in h(\overline{B(O,R)})$，即 $\log|F(s)|$ 在 $\overline{B(O,R)}$ 中是调和的，故根据平均值性质我们可得

$$\log|F(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

对于一般的 F, 我们引入 Blaschke 因子：

$$B_a(z)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

易知 Blaschke 因子是 $M\ddot{o}bius$ 变换，故他是单位圆盘上的一个同构

我们记 $\overline{B(O,R)}$ 中 F 的零点为 $a_1,a_2,...,a_k$，我们考虑 Blaschke 因子：

$$B_{\frac{a_j}{r}}(\frac{z}{r})$$

，故这是一个 $\partial B(O,R)$ 到 ∂D 上的一个同胚映射，即

$$\left|B_{\frac{a_j}{r}}(\frac{z}{r})\right|=1$$

，并且只以 a_j 为零点，且为一阶零点

考虑函数

$$g(z)=\frac{F(z)}{\prod_{j=1}^k B_{\frac{a_j}{r}}(\frac{z}{r})}$$

故 $g(z)$ 在 $\overline{B(O,R)}$ 邻域上是解析的，并且在 $\overline{B(O,R)}$ 上没有零点，, 对 $g(z)$ 使用平均值定理得：

$$\log|F(0)|-\sum_{j=1}^{m}\log\left|B_{\frac{a_j}{r}}(0)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta-\sum_{j=1}^{k}\int_0^{2\pi}\log\left|B_{\frac{a_j}{r}}(\frac{re^{i\theta}}{r})\right|\mathrm{d}\theta$$

将上式化简即得到要证的结论 □

定理 5.5.2. *(Borel-Caratheodary)* 设 $F(s)\in H(\overline{B(O,R)})$,$F(0)=0$, 若 $\max\limits_{|s|=R} Re\,F(s)\leqslant A$, 则：

$$\left|F^{(k)}(s)\right|\leqslant\frac{2ARk!}{(R-|s|)^{k+1}}$$

证明. 考虑 F 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数

$$F(s)=\sum_{n\geqslant 1}a_ns^n\qquad(|s|\leqslant R)$$

若对任意正整数 n,θ_n 表示 a_n 的辐角，则

$$Re\,F(Re^{i\theta})=\sum_{n\geqslant 1}|a_n|R^n\cos(n\theta+\theta_n)$$

级数在 $[0,2\pi]$ 上是绝对一致收敛的，由于 F 解析故 $Re\,F$ 满足平均值性质即

$$\int_0^{2\pi}Re\,F(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=0$$

注意到

$$\cos(n\theta+\theta_n)Re\,F(Re^{i\theta})=(\cos n\theta\cos\theta_n-\sin n\theta\sin\theta_n)\sum_{j\geqslant 1}|a_n|R^n(\cos j\theta\cos\theta_j-\sin j\theta\sin\theta_j)$$

故根据一致收敛性我们可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\cos(n\theta+\theta_n)Re\,F(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\\&=\sum_{j\geqslant 1}|a_n|R^n\int_0^{2\pi}(\cos n\theta\cos\theta_n-\sin n\theta\sin\theta_n)(\cos j\theta\cos\theta_j-\sin j\theta\sin\theta_j)\mathrm{d}\theta\\&=|a_n|R^n\pi(\sin^2\theta_n+\cos^2\theta_n)=|a_n|R^n\pi\end{aligned}$$

故

$$|a_n|R^n\pi=\int_0^{2\pi}\cos(n\theta+\theta_n)Re\,F(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\leqslant 2\pi A$$

故

$$|a_n|R^n\leqslant 2A$$

, 另一方面根据 Taylor 公式，得：

$$\begin{aligned}\left|F^{(k)}(s)\right| &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\left|a_n\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(s^n)\right| \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\left|2A\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(\frac{s^n}{R^n})\right| \\ &= 2A\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(\sum_{n\geqslant 1}\frac{s^n}{R^n})\right| \\ &= 2A\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{R}{R-s}\right| \\ &= 2A\left|\frac{Rk!}{(R-s)^{k+1}}\right| \\ &\leqslant \frac{2ARk!}{(R-|s|)^{k+1}}\end{aligned}$$

□

我们不加证明的给出上一定理的一个推论

定理 5.5.3. 设 $F(s)$ 是圆盘 $|s|\leqslant R$ 上的解析函数，使得 $F(0)=1$，及 $|F(s)|\leqslant M$ $(|s|=R)$ 令 Z 表示 F 在圆盘 $|s|\leqslant\frac{1}{2}R$ 中的所有零点 ϱ 在计算重数下构成的有限序列，对所有满足 $|s|<\frac{1}{2}R$ 的复数 s, 有：

$$\left|\frac{F'(s)}{F(s)}-\sum_{\varrho\in Z}\frac{1}{s-\varrho}\right|\leqslant\frac{16R\log M}{(R-2|s|)^2}$$

§5.6 $\zeta(s)$ 函数的零点分布 II

下面我们利用这两个定理，对 Riemann ζ 函数的零点分布做出估计：我们先引出一个函数：

$$\xi(s):=s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=s(s-1)\Phi(s)$$

, 故 $\xi(s)$ 为整函数，并且有 $\xi(0)=\xi(1)=1$, 由前面的定理我们可知 $\xi(s)$ 在 $\sigma\leqslant 0$ 和 $\sigma\geqslant 1$ 上没有零点，故 $\xi(s)$ 的零点均位于中间的带状区域内并且和 $\zeta(s)$ 有着相同的零点

用 $\varrho=\beta+ir$ 表示 $\xi(s)$ 的一个零点，令

$$N(T):=\sum_{\varrho:0\leqslant r\leqslant T}1$$

在这里我们引入一个先进的结果 (Tenenbaum 定理 3.8):

$$\zeta(s) \ll \tau\ (\sigma \geqslant 0, |\tau| \geqslant 1)$$

. 另一方面对复 Stiring 公式得余项做分部积分, 得

$$\log \xi(s) \ll |s| \log |s| \quad (\sigma \geqslant \frac{1}{2})$$

，另一方面由 $\xi(s)$ 的函数方程就可知对于 $s \in \mathbb{C}$，有

$$\log \xi(s) \ll |s| \log |s|, \quad (|s| \to \infty)$$

定理 5.6.1. 对 $T \geqslant 2$, 有 $N(T+1) - N(T) \ll \log\ T$

证明. (Tenenbaum) 根据之前的定理知，在 $\sigma > 1$ 和 $\sigma < 0$ 上只有负偶数为零点, 设

$$F(s) = \frac{\xi(s+2+iT)}{\xi(2+iT)}$$

. 故 $N(T+1) - N(T)$ 即为以 $-2+i, -1+i, -1, -2$ 为顶点的长方形中 $F(s)$ 的零点个数。根据上面的估计，可知

$$\log |F(s)| \ll O(\log\ T) \qquad (|s| \leqslant 3)$$

当 $\sqrt{5} \leqslant r \leqslant 3$ 时，以 $-2+i, -1+i, -1, -2$ 为顶点的长方形在 $B(O, r)$ 中，故。根据 $R = 3$ 的 Jensen 公式:

$$\int_{\sqrt{5}}^{3} \frac{n(r)}{r} \mathrm{d}r \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| F(Re^{i\theta}) \right| \mathrm{d}\theta$$

注意到

$$n(r) \geqslant N(T+1) - N(T) \qquad (\sqrt{5} \leqslant r \leqslant 3)$$

故:

$$N(T+1) - N(T) \ll O(\log T)$$

□

定理 5.6.2. 当 T 趋于无穷时有 $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log\ T)$, 故 $\zeta(s)$ 有无穷多个非显然零点。

证明. (Tenenbaum) 不妨设 T 不是 $\xi(s)$ 的零点的纵坐标, 设 R 为以 $2 \pm iT, -1 \pm iT$ 为顶点的长方形。根据幅角原理知

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi} \Delta_R \arg \xi(s)$$

由于 $\xi(s)$ 关于 $\sigma=\frac{1}{2}$ 和 $\tau=0$ 对称，设 L 为 $2, 2+iT, \frac{1}{2}+iT$ 构成的折线段，故

$$N(T)=\frac{1}{\pi}\Delta_L\arg\xi(s)$$

注意到

$$\xi(s):=s(s-1)\pi^{a\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=2(s+1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+1)\zeta(s)$$

而当 T 充分大时有

$$\Delta_L\arg(s-1)=\arg(-\frac{1}{2}+iT)=\frac{\pi}{2}+O(\frac{1}{T})$$

$$\Delta_L\arg\pi^{-\frac{s}{2}}=O(T)$$

由 Stiring 公式得 T 充分大时有:

$$\begin{aligned}\Delta_L arg\,\Gamma(\frac{s}{2}+1)&=Im\,\log\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2})\\&=Im\left[(\frac{3}{4}+\frac{iT}{2})\log(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2})-(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2})+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O(T)\right]\\&=\frac{T}{2}\log\frac{T}{2}+\frac{3\pi}{8}-\frac{T}{2}+O(\log\,T)\qquad(T\to\infty)\end{aligned}$$

故

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log\,T)+\frac{1}{\pi}\Delta_L\arg\zeta(s)$$

故我们只需再证明

$$\Delta_L\arg\zeta(s)=O(\log\,T)$$

，即

$$Im\int_L\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathrm{d}s\ll\log T$$

注意到 $\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上一致收敛，故

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\zeta(s)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\Big(\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_p\log(1-p^{-s})\\&=-\sum_p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log(1-p^{-s})\\&=\sum_p\frac{\log p}{p^s-1}\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqslant \sum_{p}\left|\frac{\log p}{\frac{1}{2}p^{s}}\right|$$

注意到右式在 $\sigma \geqslant 2$ 是一致收敛的，故

$$\left|\int_{2}^{2+iT}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathrm{d}s\right| \leqslant 2\sum_{p}\log p\left|\frac{p^{-2-iT}-p^{-2}}{\log p}\right| \leqslant 4\sum_{p}\frac{1}{p^{2}} < +\infty$$

对于 $2+iT$ 到 $\frac{1}{2}+iT$ 上的积分估计，取函数

$$F(s) = \frac{\zeta(s+2+iT)}{\zeta(2+iT)}$$

故 $F(0)=1$, 根据定理5.5.3，令 $R=4, |s|=\frac{3}{2}$：

$$\left|\frac{\zeta'(s+2+iT)}{\zeta(2+iT)} - \sum_{\varrho\in Z}\frac{1}{s-\varrho}\right| \ll \log M < \log T \qquad (T\to\infty)$$

故在 $2+iT$ 到 $\frac{1}{2}+iT$ 这段线段上有

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| - \left|\sum_{\varrho\in Z}\frac{1}{s-\varrho}\right| < \log T$$

根据定理5.6.1知：

$$\sum_{\varrho\in Z} 1 \ll \log T$$

而注意到

$$\left|Im\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{1}{s-\varrho}\mathrm{d}s\right| = \left|\arg\frac{\frac{1}{2}+iT-\varrho}{2+iT-\varrho}\right| \leqslant \pi$$

故

$$\Delta_L \arg\zeta(s) = O(\log\ T)$$

，即

$$Im\int_{L}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathrm{d}s \ll \log T$$

□

§5.7　Hadamard 乘积展开

至此我们给出了关于 $\xi(s)$ 的零点分布的估计，下面我们根据这一估计给出 $\xi(s)$ 和 $\zeta(s)$ 的另一种成乘积展开即 Hadamard 展开。

定理 5.7.1. 对适当的常数 a,b，有

$$\xi(s)=e^{as}\prod_{\varrho}\big(1-\frac{s}{\varrho}\big)e^{\frac{s}{\varrho}}$$

$$\xi(s)=\frac{e^{bs}}{2(s-1)}\Gamma(\frac{s}{2}+1)^{-1}\prod_{\varrho}\big(1-\frac{s}{\varrho}\big)e^{\frac{s}{\varrho}}\qquad (s\neq 1)$$

特别的 $a=\frac{1}{2}\log(4\pi)-\frac{1}{2}\gamma-1, b=\log(2\pi)-\frac{1}{2}\gamma-1$

证明. (Tenenbaum) 注意到

$$\sum_{|r|<T}\frac{1}{|\varrho|^2}\leqslant 2\int_0^T\frac{\mathrm{d}N(t)}{t^2}\ll\sum_{k\leqslant T}\frac{\log(2k)}{k^2}\ll 1$$

记

$$P(s)=\prod_{\varrho}\Big[\big(1-\frac{s}{\varrho}\big)e^{\frac{s}{\varrho}}\Big]$$

, 故

$$P(s)=\prod_{\varrho}\Big[1-\frac{s^2}{\varrho^2}+o(\frac{s^2}{\varrho^2})\Big]$$

故 $P(s)$ 是良定义的，并且是整函数并且与 $\xi(s)$ 有相同的零点。

设

$$F(s):=\log\big(\frac{\xi(s)}{P(s)}\big)$$

, 故 $F(s)$ 为整函数并且 $F(0)=0$.

另一方面注意到 c 充分大的时候

$$\Big|\{\varrho:k\leqslant|\varrho|\leqslant k+2\}\Big|\leqslant 2\Big(N(k+2)-N(k-1)\Big)<[c\log k]:=J$$

由抽屉原理知存在 $j_k\in[0,J]$, 使得 $[k+\frac{2j_k}{J},k+\frac{2j_k+2}{J}]$ 中无形如 $|\varrho|$ 的数, 记 $R_k=k+\frac{2j_k+1}{J}$，故有 $\min\limits_{\varrho}\big|R_k-|\varrho|\big|\geqslant\frac{1}{c\log R_k}$

故对任意 $k\geqslant 2$，在 $[k,k+2]$ 中存在 R 使得 $\min\limits_{\varrho}\big|R-|\varrho|\big|\geqslant\frac{1}{c\log R}$

对于满足上式的 R, 对 $|s|=R$ 有：

$$\log|P(s)|=\sum_{\varrho}\log\Big|\big(1-\frac{s}{\varrho}e^{\frac{s}{\varrho}}\big)\Big|$$

容易发现不等式

$$\log\Big|(1-z)e^z\Big|\geqslant\begin{cases}-|z| & |z|\geqslant 2\\ -2+\log|1-z| & \frac{1}{2}<|z|<2\\ -|z|^2 & |z|\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\tag{5.1}$$

故

$$\log\left|P(s)\right| \geqslant -\left\{ \sum_{|\varrho|\leqslant\frac{R}{2}} \frac{R}{|\varrho|} + \sum_{\frac{R}{2}<|\varrho|<2R} \left[2-\log\left|1-\frac{s}{\varrho}\right|\right] + \sum_{|\varrho|\geqslant 2R} \frac{R^2}{|\varrho^2|} \right\}$$

注意到

$$\sum_{|\varrho|\leqslant\frac{R}{2}} \frac{R}{|\varrho|} \leqslant \sum_{k\leqslant\frac{R}{2}} \frac{R}{k}\Big(N(k+1)-N(k)\Big) \ll R(\log R)^2$$

$$\sum_{|\varrho|\geqslant 2R} \frac{R^2}{|\varrho^2|} \ll 1$$

根据之前的估计得

$$\left|\log\left|1-\frac{s}{\varrho}\right|\right| \geqslant \log\left|1-\frac{s}{|\varrho|}\right| \geqslant -\log(2CR\log R)$$

综上所述

$$\log\frac{1}{P(s)} \ll R(\log R)^2$$

由前知

$$\log\xi(s) \ll R log R, \quad (|s|\to\infty)$$

，故对于一列趋于 $+\infty$ 的 R 有

$$Re\,F(s) \ll R(\log R)^2$$

, 故存在正常数 m，当 R 充分大时有

$$Re\,F(s) \leqslant mR(\log R)^2$$

。由 $k=2$ 的 Borel-Caratheodary 定理，得

$$\left|F''(s)\right| \leqslant \frac{2mR^2(\log R)^2 k!}{(R-|s|)^3}$$

令 $R\to\infty$, 得 $\lim\limits_{|s|\to\infty} F''(s)=0$. 而 $F(s)$ 是整函数，又由于 $P(0)=\xi(1)=1$, 故 $F=as$, 其中 a 为常数，故

$$\xi(s) = e^{as}\prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}}$$

□

§5.8 无零点区域

定理 5.8.1. *存在正常数 c，使得 $\zeta(s)$ 在区域 $\sigma \geqslant 1-\dfrac{c}{\log(2+|\tau|)}$ 上无零点*

证明. 略 □

第六章 *Perron*公式

在解析数论中，Dirichlet 级数的一个解析应用就是利用复积分来研究其算术函数的均值，对于 Dirichlet 级数 $F(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$, 设它的收敛坐标和绝对收敛坐标分别为 σ_c 和 σ_a, 若 x 不为整数，定义 $a_x=0$, 于是可将函数 $n\to a_n$ 的定义域延拓到 $\mathbb{R}$ 上，并引进正规化和函数：

$$A^*(x)=\sum_{n\leq x}a_n-\frac{1}{2}a_x \quad (x\geq 0)$$

定理 6.0.1. *(Perron 公式) 设 $\kappa>max(0,\sigma_c)$，则对于 $x>0$, 有*

$$A^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}F(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}$$

其中当 x 不为整数时积分收敛，当 x 为正在整数时按主值收敛

引理 6.0.1. *设 $\kappa,T,T_1,T_2>0$*

(i) 对于 $x\neq 1$, 有

$$\left|h(x)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\leq\frac{x^\kappa}{2\pi|\log x|}\Big(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\Big)$$

(ii)

$$\left|h(1)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\leq\frac{\kappa}{T}$$

其中 $h(x)$ 定义为：

$$h(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 0 & 0<x<1\end{cases} \tag{6.1}$$

证明. 先考虑 $x>1$ 的情况，令 k 为足够大的正整数，$\mathscr{R}_k$ 是顶点为 $\kappa-iT_1,\kappa+iT_2,\kappa-k-iT_1,\kappa-k+iT_2$ 的矩形，根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{R}_k}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=1=h(x)$$

利用估计我们可以得到

$$\left|\int_{\kappa-k-iT_1}^{\kappa-iT_1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\leq\frac{x^\kappa}{T_1|\log x|}$$

$$\left|\int_{\kappa-k-iT_2}^{\kappa-iT_2}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\le\frac{x^\kappa}{T_2|\log x|}$$
$$\left|\int_{\kappa-k-iT_2}^{\kappa-k+iT_2}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\le\frac{x^{\kappa-k}}{k-\kappa}(T_1+T_2)$$
再令 $k\to+\infty$ 便可以得到要证的结论。

对于 $0<x<1$ 情况和之前类似，将 k 换成 $-k$ 即可

对于 $x=1$ 的情况直接证明即可，此处略去 □

下面我们给出 Perron 公式的证明：

证明. 先设 $\kappa>\sigma_a$, 于是级数 $F(s)$ 对 $\sigma=\kappa$ 绝对一致收敛，从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}\left(\sum_{n\ge1}\frac{f(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\ge1}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}\frac{f(n)}{n^s}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\ge1}a_n\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\end{aligned}$$

根据引理得，当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ 时有

$$\left|h(\frac{x}{n})-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}(\frac{x}{n})^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|a_n\le\frac{(\frac{x}{n})^\kappa}{2\pi|\log\frac{x}{n}|}(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2})a_n$$

, 由上面的两个估计得

$$\left|\sum_{n\ge1}a_nh(\frac{x}{n})-\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT_1}^{\kappa+iT_2}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\le\frac{x^\kappa}{2\pi}(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2})\sum_{n\ge1}\frac{|a_n|}{|n^\kappa|*|\log\frac{x}{n}|}$$

而 $\sum\limits_{n\ge1}a_nh(\dfrac{x}{n})=A^*(x),(n\notin\mathbb{N})$, 在上式中令 $T_1,T_2\to\infty$, 由于 $\sum\limits_{n\ge1}\frac{|a_n|}{|n^\kappa|*|\log\frac{x}{n}|}$ 是收敛的，故右式趋于 0，故当 x 不为整数时积分收敛。

当 x 为正在整数时, 情况同上，略去 □

定理 6.0.2. *(第一实效 Perron 公式)*，对于 $\kappa>max\{0,\sigma_c\},x\ge1,T\ge1$ 有

$$A^*(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^\kappa\sum_{n\ge1}\frac{|a_n|}{n^\kappa(1+T|\log\frac{x}{n}|)}\right)$$

此式根据 Perron 公式的证明过程即可得到，此处略去

定理 6.0.3. *(第二实效 Perron 公式)* 设 $F(s)$ 为 *Dirichlet* 级数，并且具有有限的绝对收敛坐标 σ_a，假设存在实数 $\alpha\ge0$, 使得

(i) 对于 $\sigma\in(\sigma_a,\sigma_a+1]$ 有

$$\sum_{n\le1}|a_n|n^{-\sigma}\ll(\sigma-\sigma_a)^{-\alpha}$$

(ii) 存在单调增函数 B，使得对正整数 n，有 $|a_n| \geq B(n)$, 那么对于 $x \geq 2, T \geq 2, \sigma \leq \sigma_a, \kappa := \sigma_a - \sigma + \frac{1}{\log x}$, 有

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s+w) \frac{x^w}{w} \mathrm{d}w + O\left(x^{\sigma_a - \sigma} \frac{(\log x)^\alpha}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma} \big(1 + \frac{x \log T}{T}\big) \right)$$

证明略去

第七章 $Dirichlet$特征

§7.1 群的特征

设 G 为有限 Abel 群，G' 是 G 的一个子群，则根据抽象代数中的知识得，对于 G 中的任一元素 a 比存在正整数 n 使得 $a^n \in G'$, 我们称最小的这样的 n 为a **在 G' 中的指数**

定理 7.1.1. *设 G 为有限 Abel 群，G' 是 G 的一个子群，并且 $G' \neq G$，在 G 中任取一个元素 $a, a \notin G'$, 设 h 是 a 在 G' 中的指数，则乘积的集合 $G" := \{xa^k | x \in G'$ 且 $k = 0, 1, ..., h-1\}$ 满足 $G \supset G" \supset G'$, 并且 $|G"| = h|G'|$*

证明. 显然 $G"$ 满足乘法封闭性，并且存在逆元。并且根据定义知 $G"$ 中至多有 $h|G'|$ 个元素, 故我们只需验证这些元素是互不相同的。这些证明都是不困难的，此处略去。 □

设 G 是一个群，定义在群 G 上的复值函数 f 如果具有可乘性，并且存在 $c \in G$ 使得 $f(c) \neq 0$, 则称 f 为**群 G 上的一个特征**

定理 7.1.2. *阶为 n 的 Abel 群有且仅有 n 个不同的特征*

证明. 记 $G_1 = \{e\}$, 根据定理7.1.1, 对于群 G 和 G 的子群 G'，对 $G \setminus G'$ 中的元素 a, 可以构造出群 $G"$，记 $G" =< G', a >$.

若 $G \neq G_1$，则我们记 a_1 是 $G \setminus G_1$ 中的元素，记 $G_2 =< G_1, a_1 >$, 以此类推我们便可以归纳定义一列集合。由于 G 是有限群，故存在正整数 t 使得 $G_{t+1} = G$. 下面可以用数学归纳法证明，设 G_r 的阶为 m, 有且仅有 m 个特征。

考虑 $G_{r+1} =< G_r, a_r >$, 设 h 为 a_r 在 G_r 中的阶，下面证明有且只有 h 种方法将 G_r 的每一个特征扩大为 G_{r+1} 的一个特征，并且每个 G_{r+1} 的特征都是 G_r 的特征的延拓。

若能将 G_r 的特征 f 扩大为 G_{r+1} 的一个特征 $\widetilde{f}$, 则可知 $\widetilde{f}(xa_r^k) = f(x)\widetilde{f}(a_r)^k$, 在上式中令 $x = e, k = h$，故可知 $\widetilde{f}(a_r)$ 的取值最多有 h 种选择，并且由可乘性知对于每一个取值都可以延拓出唯一的 G_{r+1} 的特征。显然每个 G_{r+1} 的特征在 G_r 上的限制是 G_r 的特征，根据定理7.1.1 知证毕 □

对于有限 Abel 群 G 之间的不同特征间的关系，我们将 G 的特征中取值恒为 1 的特征成为**主特征**，其余特征称为**非主特征**, 故对于 G 的非主特征 f 一定存在 $a\in G$ 有 $f(a)\neq 1$

定理 7.1.3. *一个阶为 n 的 Abel 群的所有群特征构成一个阶为 n 的 Abel 群 $\hat{G}$*

证明. 令 $\hat{G}$ 是所有同态 $\chi: G\to\mathbb{C}^*$（称为群 G 的特征标）, 显然构成了一个乘法群

令

$$G\cong\prod_{1\leqslant j\leqslant k}G_j$$

为 G 的循环群乘积分解，令 $n_j=|G_j|(1\leqslant j\leqslant k)$，故

$$n=\prod_{1\leqslant j\leqslant n}n_j$$

若 γ_j 是 G_j 的一个生成元，则对于 G 中的任意一个元素 γ 均可唯一的分解为乘积：

$$\gamma=\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\gamma_j^{r_j}\qquad(q\leqslant r_j\leqslant n_j)$$

于是对每个 G 的特征标 χ, 有：

$$\chi(\gamma)=\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\chi(\gamma_j)^{r_j}$$

注意到 γ_j 的阶恰为 n_j，故 $\chi(\gamma_j)$ 是 n_j 阶单位根，对任意的

$$\zeta_j=\exp(\frac{h_j}{n_j})\qquad(1\leqslant j\leqslant k)$$

,$1\leqslant h_j\leqslant n_j$ 的选择，映射 $\chi: G\to\mathbb{C}$,

$$\chi(\gamma)=\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\zeta_j^{r_j}$$

所以 $\hat{G}$ 对于的映射乘积构成 n 阶交换群 □

定理 7.1.4. *对任意 n 阶交换群 G，有*

$$\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(\gamma)=\begin{cases}n & \gamma=1\\ 0 & \gamma\neq 1\end{cases}\qquad(\gamma\in G)$$

$$\sum_{\gamma\in G}\chi(\gamma)=\begin{cases}n & \chi=\chi_0\\ 0 & \chi\neq\chi_0\end{cases}\qquad(\chi\in\hat{G})$$

证明. 我们只证明第一个式子，记左式为 S. 若 $\gamma=1$，则上式显然。

若 $\gamma\neq 1$, 则存在特征标 χ_1, 使得 $\chi_1(\gamma)\neq 1$, 重排因子后可设 $r_1\neq n_1$，映射

$$\chi(\gamma_1)=e^{\frac{1}{n_1}},\chi(\gamma_j)=1\ (2\leqslant j\leqslant k)$$

便有所需的性质。注意到 χ 遍历 $\hat{G}$ 时 $\chi\chi_1$ 也遍历 $\hat{G}$, 故

$$\chi_1(\gamma)S=\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi_1(\gamma)\chi(\gamma)=\sum_{\chi\in\hat{G}}(\chi\chi_1)(\gamma)=S$$

故 $S=0$ □

§7.2 *Dirichlet* 特征

设 q 为正整数，设 f 为模 q 的简化剩余系上的一个特征，在模 q 的完全剩余系上做零延拓，在整数加群上做周期为 q 的延拓 χ, 即做到 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 上的延拓,χ 称**为模 q 的 Dirichlet 特征**. 其中由模 q 的简化剩余系上的主特征延拓得到的模 q 的 Dirichlet 特征称为**模 q 的主特征**，记为 χ_0。

根据可乘性可得 $\chi(1)=1$, 对于 $(n,q)=1$, 根据 Euler 定理可得 $\chi(n)^{\varphi(q)}=\chi(n^{\varphi(q)})=\chi(1)=1$, 故 χ 的取值总是 $\varphi(q)$ 次单位根，故模 q 的 Dirichlet 特征只有有限个。另一方面我们根据之前的内容易得

定理 7.2.1. *模 q 的 Dirichlet 特征共有 $\varphi(q)$ 个, 并且这些特征构成了一个 $\varphi(q)$ 阶 Abel 群*

根据定理7.2.1可知对于模 q 的特征 χ, 存在模 q 的特征 χ' 使得 $\chi\chi'=\chi_0$, 我们称 χ' 为 χ 的**共轭特征**

定理 7.2.2. *(1) 对于模 q 的特征 χ,$|\chi(n)|=1$ 当且仅当 $(n,q)=1$*

(2) 对于模 q 的特征 χ，$(n,q)=1$，有 $\overline{\chi}(n)=\chi(\overline{n})$

(3) 设 χ_1,χ_2 分别是模 q_1,q_2 的特征, 则 $\chi_1\chi_2$ 为模 $[q_1,q_2]$ 的特征

(4) 设 χ_1 是模 q 的特征，则 $\chi\chi_1$ 遍历所有模 q 的特征当且仅当 χ 遍历模 q 的所有特征

证明略去

根据定理7.2.1，我们知道 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 上恰有 $\varphi(q)$ 个特征标，故我们沿袭定理7.1.3的思路，将 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 分解成为循环群的乘积。

根据中国剩余定理，对任意正整数 $q\geqslant 1$, 有：

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*\cong\prod_{p^v\|q}(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^*$$

根据初等数论中有关于原根的内容可知，当 $p>2$ 或 $p=2, v=1$、2、3 时,$(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^*$ 是循环群，$v>3$ 时不为循环群。

我们下面证明 $(\mathbb{Z}/2^v\mathbb{Z})^*$ 在 $p>2$ 时可以写成一个 2 阶群与一个 2^{v-2} 阶循环群的乘积。首先根据数学归纳法显然可以得到

$$5^{2^{m-2}}=1+2^m h_m \qquad (m>1)$$

, 其中 h_m 为奇数，令 $m=v$ 可知 5 模 2^v 的阶整除 2^{v-2}, 而令 $m=v-1$ 可知这个阶不整除 2^{v-3}，故阶即为 2^{v-2}. 而 $v=3$ 时，5 不为原根，故这个结论得证。

至此我们完成了 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 的分解，我们现在可以具体确定其特征标，具体确定方式即如定理7.1.3所示，此处略去

eg. $mod\,3$ 的唯一非平凡特征是

$$\chi_3(m):=\frac{e^{\frac{m}{3}}-e^{-\frac{m}{3}}}{i\sqrt{3}}=\begin{cases}1 & m\equiv 1(mod\,3)\\ -1 & m\equiv 2(mod\,3)\end{cases}$$

§7.3 *Dirichlet* 特征的正交性

定理 7.3.1. 设 q 为正整数，χ 是模 q 的 *Dirichlet* 特征，则

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{a(mod\ q)}\chi(a)=\begin{cases}1 & \chi=\chi_0\\ 0 & \chi\neq\chi_0\end{cases}$$

证明. $\chi=\chi_0$ 时显然，当 $\chi\neq\chi_0$ 时，总存在与 q 互素的正整数 n 使得 $\chi(n)\neq 1$。当 a 遍历模 n 的完全剩余系时，an 也遍历模 q 的完全剩余系，故:

$$\sum_{a(mod\ q)}\chi(a)=\sum_{a(mod\ q)}\chi(an)=\chi(n)*\sum_{a(mod\ q)}\chi(a)$$

由于 $\chi(n)\neq 1$ 故 $\sum_{a(mod\ q)}\chi(a)=0$ □

定理 7.3.2. 设 q 为正整数，对于与 q 互素的正整数 m,n 我们有：

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(mod\ q)}\chi(m)\overline{\chi}(n)=\begin{cases}1 & m\equiv n(mod\ q)\\ 0 & m\not\equiv n(mod\ q)\end{cases}$$

证明. 根据特征的可乘性可得，不妨设 $n=1$, 当 $m\equiv 1(mod\ q)$ 时，结论显然。

当 $m \not\equiv 1(mod\ q)$ 时，根据定理7.3.1, 我们考虑均值

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{m(mod\ q)} \left| \sum_{\chi(mod\ q)} \chi(m) \right|^2 \\
&= \sum_{m(mod\ q)} \sum_{\chi_1,\chi_2(mod\ q)} (\chi_1\overline{\chi_2})(m) \\
&= \sum_{\chi_1,\chi_2(mod\ q)} \left(\sum_{m(mod\ q)} (\chi_1\overline{\chi_2})(m) \right) \\
&= \varphi(q)^2
\end{aligned}
$$

另一方面可得到

$$
S = \varphi(q)^2 + \sum_{\substack{m(mod\ q) \\ m\not\equiv 1(mod\ q)}} \left| \sum_{\chi(mod\ q)} \chi(m) \right|^2
$$

故当 $m \not\equiv 1$ 时，有 $\sum\limits_{\chi(mod\ q)} \chi(m) = 0$，得证 □

对于模 q 的特征 χ, 若其取值恒为实数，则称 χ 为模 q 的**实特征**，否则我们称之为**复特征**。特别的对于奇数 q，对应的 Jacobi 符号便是模 q 的实特征。

设 q 为正整数，对于模 q 的特征 χ, 若存在正整数 $q_1 < q$, 使得对于每个与 q 互素的正整数 n，只要 $n \equiv 1(mod\ q_1)$，都有 $\chi(n) = 1$, 则称 χ 为模 q 的**本原特征**，否则称为模 q 的**原特征**。

很多情况下，原特征有着比非原特征更加漂亮的性质，然而对于给定的模，其原特征不一定存在。